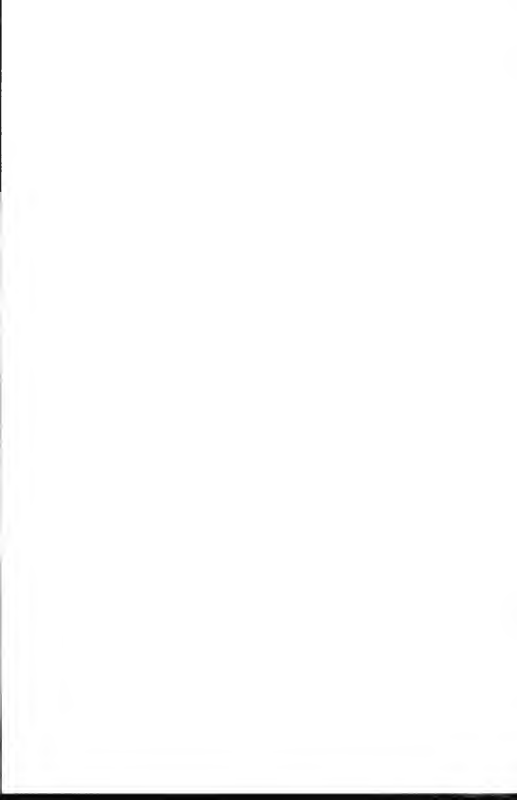


ГЕНЕРАЦИЯ
КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ
УДАРНЫМИ
ВОЛНАМИ









АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЯКУТСКИЙ ФИЛИАЛ
ИНСТИТУТ КОСМОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И АЭРОНОМИИ

ГЕНЕРАЦИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
А. И. Кузьмин



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1988

Авторы

Е. Г. Бережко, В. К. Елшин, Г. Ф. Крымский, С. И. Петухов

Генерация космических лучей ударными волнами/Бережко Е. Г., Елшин В. К., Крымский Г. Ф., Петухов С. И.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— 182 с.

ISBN 5—02—028598—6.

В монографии отражено современное состояние теории ускорения заряженных частиц бесстолкновительными ударными волнами. Приводятся как линейные, так и нелинейные модели регулярного ускорения, в которых учитывается обратное влияние ускоренных частиц на структуру ударной волны. Анализируются экспериментальные результаты, а также возможности регулярного ускорения как источника галактических космических лучей.

Книга рассчитана на специалистов по физике космических лучей, астрофизике и космическим исследованиям.

Ил. 30. Библиогр.: 254 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук *А. М. Рубенчик*
кандидат физико-математических наук *И. А. Гранский*

Утверждено к печати
Институтом космофизических исследований
и астрономии Якутского филиала
СО АН СССР

ПРЕДИСЛОВИЕ

Космические лучи играют важную роль в физике космической среды: они содержат энергию, сравнимую с энергией остальных компонентов среды, и во многих случаях определяют характер динамических процессов. Различным вопросам, связанным с физикой и астрофизикой космических лучей, посвящена обширная литература (см., например, [1—6]). Происхождение космических лучей — одна из актуальных проблем астрофизики. Из двух аспектов этой проблемы — определение источников космических лучей и установление механизмов ускорения — первый, чисто астрофизический, оставался центральным в течение длительного периода. В последнее время, однако, все большее внимание стал привлекать второй аспект, где предметом исследования выступает сам процесс ускорения частиц до энергий, характерных для космических лучей.

За последние 5—7 лет заметное место в исследованиях процессов ускорения занимают работы, в которых разрабатывается механизм регулярного ускорения частиц ударными волнами. Сегодня этот механизм может считаться наиболее полно изученным, а вытекающие из него следствия доступны экспериментальной проверке.

Отдельные вопросы, связанные с процессом регулярного ускорения, изложены в нескольких обзорах, а также отражены в монографиях [1, 6]. Большое количество оригинальных работ, посвященных разным сторонам этой проблемы, а также интерес к механизму, проявляемый с точки зрения астрофизических приложений, оправдывают попытку написания монографии, которая посвящена только вопросам ускорения заряженных частиц ударными волнами. Основным следствием ускорения частиц, важным с точки зрения астрофизики, является генерация космических лучей — и это отражено в названии монографии.

Содержание видно из оглавления. Главы 1, 3 и 6 написаны Е. Г. Бережко, 4 глава — С. И. Петуховым и Е. Г. Бережко, 2 глава — В. К. Ёлшиным, Г. Ф. Крымским и Е. Г. Бережко, а 5 глава — Г. Ф. Крымским и Е. Г. Бережко.

Авторы благодарят за помощь при проведении численных расчетов и полезные замечания В. С. Николаева и А. А. Турпанова и выражают признательность рецензентам И. А. Транскому и А. М. Рубенчику, прочитавшим рукопись и давшим ей оценку. Авторы благодарны профессору А. И. Кузьмину, согласившемуся взять на себя ответственность за научное редактирование книги.

ЯВЛЕНИЯ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

В космической плазме протекают процессы, приводящие к генерации быстрых заряженных частиц с энергией, намного превышающей тепловую. Быстрые ускоренные частицы непосредственно регистрируются с помощью устройств, установленных на космических аппаратах, в различных областях межпланетного пространства, которое заполнено плазмой солнечного ветра [1]. Их энергия в отдельных случаях достигает нескольких гигаэлектронвольт, что на несколько порядков превосходит характерную тепловую энергию плазмы. Одним из примеров такого рода могут служить солнечные космические лучи, которые генерируются во время вспышек на Солнце [2, 3].

Наличие большого количества релятивистских заряженных частиц установлено методами радио-, рентгеновской и гамма-астрономии в различных астрофизических объектах, таких как остатки сверхновых звезд, радиогалактики и других [4—7]. Одним из наиболее ярких следствий процессов ускорения выступают галактические космические лучи, происхождение которых остается важной, но нерешенной проблемой [4—6].

Особый интерес представляют процессы ускорения, протекающие вблизи фронтов ударных волн, распространяющихся в космической плазме, прежде всего благодаря тому, что ударные волны — явление довольно распространенное в космическом пространстве. Примерами могут служить ударные волны от солнечных вспышек [8—10], от вспышек сверхновых звезд [7] и т. д. Кроме того, в процессе образования ударных волн, как правило, выделяется большое количество энергии в форме направленного движения плазмы. Заметная часть (десятки процентов) этой энергии может идти на ускорение небольшой доли частиц плазмы, способствуя появлению частиц с энергией, на много порядков выше тепловой.

Первые экспериментальные указания об ускорении заряженных частиц межпланетными ударными волнами были получены на основе обработанных данных наземных измерений [11—13]. Результаты космических экспериментов [14—16] и развитие теоретических представлений о возможных механизмах ускорения [17—25] окончательно доказали наличие в окрестности фронтов ударных волн интенсивных процессов ускорения, которые в настоящее время интенсивно исследуются (см. [1] и ссылки там).

По данным измерений, несмотря на то, что доля ускоренных частиц обычно невелика (в силу жесткого характера их спектра, который в широком энергетическом диапазоне, как правило, аппроксимируется степенной функцией энергии), на них может приходиться существенная часть полного энергосодержания в плазме (см., например, [26]). Поэтому во многих случаях быстрые частицы оказываются важным фактором, существенно влияющим на динамику плазмы.

Ударные волны, возникающие во время особенно мощных вспышек на Солнце, генерируют частицы, энергия которых составляет десятки, сотни мегаэлектронвольт, а в отдельных случаях — нескольких гигаэлектронвольт [27, 28]. Такие частицы, проникая в околоземное космическое пространство, вызывают ряд значительных эффектов. Так, они могут существенно изменять условия радиосвязи на Земле, а также радиационную обстановку в околоземном космическом пространстве [29].

В силу сказанного исследование процессов ускорения необходимо как для понимания фундаментальных свойств космической плазмы, для воссоздания целостной картины таких явлений, как солнечные вспышки и взрывы сверхновых звезд, так и для решения многих прикладных проблем. Кроме этого, имеются веские доводы в пользу того, что ударные волны от сверхновых звезд — один из основных источников галактических космических лучей.

Чтобы глубже понять условия развития возможных процессов ускорения заряженных частиц вблизи фронтов ударных волн, обратимся к анализу основных свойств космической плазмы и особенностей распространения в ней крупномасштабных ударных волн.

Заметим, что везде дальше термин «космические лучи» будет использоваться в широком смысле — помимо солнечных и галактических космических лучей, для обозначения быстрых, ускоренных частиц.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Космические лучи, являясь частью космической плазмы, чаще всего представляют собой наиболее быстрые частицы теплового распределения, ускоренные посредством развивающихся в ней процессов ускорения. С другой стороны, характер движения космических лучей полностью определяется свойствами среды, в которой они распространяются.

Межпланетное пространство, а также более 70% межзвездного пространства Галактики заполняет высокотемпературная, полностью ионизованная плазма. Температура и концентрация плазмы солнечного ветра у орбиты Земли [8—10] $T = 10^5$ К, $N = 10$ см $^{-3}$, а средние параметры межзвездной плазмы [30] — $T = 5 \cdot 10^5$ К, $N = 3 \cdot 10^{-3}$ см $^{-3}$. При этом следует иметь в виду, что вследствие радиального по отношению к Солнцу движения солнечного ветра его параметры несколько изменяются в пределах гелиосферы, ра-

диус которой по современным представлениям $R \approx 100$ а. е. [1, 8—10]. Что касается межзвездного пространства, то здесь помимо упомянутой горячей разреженной плазмы имеются менее протяженные области, заполненные средой со значительно отличающимися свойствами [30—32]. Однако с точки зрения развития процессов ускорения космических лучей ударными волнами наиболее благоприятные условия реализуются именно в горячей, полностью ионизованной плазме, рассмотрением которой мы и ограничимся.

Для космических лучей наиболее важной характеристикой плазмы является величина ее проводимости. Дело в том, что движение частиц космических лучей в сильной степени контролируется крупномасштабным магнитным полем B , которое имеется как в межпланетном [8—10] ($B \sim 10^{-5}$ Гс), так и в межзвездном пространстве [32] ($B \sim 10^{-8}$ Гс). Эволюция крупномасштабного магнитного поля определяется проводимостью плазмы σ в соответствии с уравнением [31]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [\nabla [\mathbf{uB}]] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (1.1)$$

(c — скорость света, \mathbf{u} — гидродинамическая скорость плазмы), которое показывает, что характерное время диссипации поля

$$\tau_d \sim 4\pi L^2 \sigma / c^2, \quad (1.2)$$

где L — характерный масштаб изменения B . Для выяснения роли диссипации магнитного поля в плазме достаточно сравнить время τ_d с характерным временем рассматриваемого процесса τ . В задаче об ускорении космических лучей ударными волнами в качестве τ может выступать характерное время жизни ударной волны $\tau_s = R / (dR/dt)$. Если предположить, что проводимость обусловлена парными столкновениями, то с учетом того, что в космической плазме основным сортом ионов являются протоны, нетрудно получить значения $\sigma = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ для межпланетной плазмы и $\sigma = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ для межзвездной. При этом как для межпланетных ударных волн ($R = 1-100$ а. е., $dR/dt \sim 10^6 \text{ м/с}$), так и для крупномасштабных ударных волн в межзвездном пространстве ($R = 1-100$ пк, $dR/dt = 10^5 - 10^8 \text{ м/с}$) с большим запасом выполняется неравенство

$$\tau_d \gg \tau_s. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) позволяет полностью пренебречь диссипацией, что эквивалентно условию «вмороженности» крупномасштабного магнитного поля в плазму [31]. Тогда крупномасштабное электрическое поле возникает в плазме только вследствие ее движения в магнитном поле

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{uB}] / c. \quad (1.4)$$

Таким образом, при выполнении условия (1.3) космическая плазма ведет себя подобно высокопроводящей среде, и связано это не столько с хорошей проводимостью плазмы, сколько с ее большими пространственными масштабами.

В космической плазме могут развиваться различные типы неустойчивости, что создает высокий уровень турбулентности в ней [33]. Это приводит к тому, что процессы переноса в плазме, в частности проводимость, обеспечиваются не парными столкновениями тепловых частиц, а их взаимодействием с хаотическими электромагнитными полями плазменной турбулентности, что по своей природе представляет собой коллективный процесс. При учете коллективных столкновений, как показывают оценки, проводимость космической плазмы может быть значительно понижена [33]. Однако и в этом случае характерное время диссипации магнитного поля [32]

$$\tau_d \simeq 10^8 \left(\frac{L}{10^{-3} \text{ пк}} \right)^2 \left(\frac{N}{0,1 \text{ см}^{-3}} \right)^{1/2} \text{ лет}$$

все еще велико настолько, что неравенство (4.3) выполняется во всех практически интересных случаях.

Бестолковность космической плазмы определяет характер распространения в ней космических лучей. Не только для частиц тепловой плазмы, но и для космических лучей главную роль играют коллективные процессы, а не парные соударения. В тех случаях, когда плотность энергии космических лучей сравнима с плотностью энергии тепловой плазмы, становится существенным коллективный характер их взаимодействия, понимаемый в буквальном смысле: как когерентное движение групп или пучков частиц.

Движение космических лучей регулируется магнитными полями, «вмороженными» в плазму, и электромагнитными полями плазменной турбулентности [1, 4—6]. При этом движение быстрой заряженной частицы в магнитном поле, характерный масштаб неоднородности которого L превышает гирорадиус частицы r_h , представляет собой регулярное движение вдоль силовых линий с более медленным дрейфом поперек их, что может быть описано в рамках дрейфового приближения [1, 34].

Взаимодействие частицы с неоднородностями магнитного поля, имеющими размер, меньший гирорадиуса, приводит к случайным изменениям ее скорости v , т. е. к диффузии в фазовом пространстве.

Имеются несомненные доказательства наличия как в межпланетной, так и в межзвездной плазме протяженного спектра магнитных неоднородностей и развитой магнитогидродинамической турбулентности. Вместе с тем современное состояние теоретических и экспериментальных исследований (за исключением некоторых частных случаев) не дает возможности по измеренным или рассчитанным спектрам неоднородностей надежно определять параметры распространения космических лучей — коэффициенты их диффузии. Во многих случаях приходится ограничиваться использованием оценок для коэффициентов диффузии на основе данных измерений различных характеристик солнечных и галактических космических лучей [1—6].

При распространении возмущений конечной амплитуды в сжимаемой среде нелинейные взаимодействия приводят к сильному укрупнению фронта возмущения. Такие возмущения, образующиеся, например, в результате взрывоподобных процессов (когда в локальной области среды за короткое время выделяется большое количество энергии), распространяются в среде в форме ударной волны, скорость которой превышает скорость звука

$$c_s = \sqrt{\gamma P / \rho},$$

где γ — показатель адиабаты, P — давление, ρ — плотность среды [31, 34—38]. Узкая область, отделяющая невозмущенную среду от возмущенной, носит название ударного фронта. В пределах ударного фронта за счет различного рода диссипативных процессов, таких как вязкость или теплопроводность, среда испытывает необратимый переход от равновесного невозмущенного состояния к квазиравновесному возмущенному, причем характерная толщина ударного фронта оказывается намного меньше других пространственных масштабов.

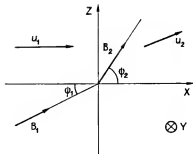
Во избежание недоразумений заметим, что иногда термин «ударная» волна используется только для обозначения ударного фронта. Мы же под ударной волной будем понимать всю область, занятую распространяющимся возмущением.

Ударные волны могут распространяться не только в обычном газе, где диссипативные процессы на ударном фронте обусловлены парными столкновениями, но и в бесстолкновительной плазме [38, 39], когда диссипация является следствием развития плазменных неустойчивостей и носит коллективный характер.

Теоретическое описание структуры ударного фронта для условий, реализующихся в космической плазме, представляет собой сложную, до конца неизученную проблему (см., например, [40] и ссылки там). Вместе с тем особенности структуры ударного фронта и его реальная (малая) толщина во многих задачах особой роли не играют, а практически важные соотношения, связывающие состояния среды перед и за ударным фронтом, могут быть получены на основе использования законов сохранения. При рассмотрении многих физических явлений, в том числе процессов ускорения, которые развиваются вблизи ударного фронта в областях с характерным размером, много меньшим размера ударной волны R , можно пренебречь кривизной ударного фронта, переходя к плосковолновому приближению.

Наиболее просто обсуждение случая плоской ударной волны, схематически изображенной на рис. 1.1, можно провести в системе отсчета, в которой ударный фронт покоится. Оси системы координат выбраны так, что среда перед ударным фронтом движется вдоль оси X , положение ударного фронта, который будем считать бесконечно тонким, совпадает с плоскостью OYZ , магнитное поле B и вектор скорости плазмы за ударным фронтом u_z лежат в плос-

Рис. 1.1. Схематическая структура быстрой магнитогидродинамической ударной волны, фронт которой расположен в плоскости $x = 0$.



кости OXZ . Помечая величины, относящиеся к области перед фронтом, индексом 1, а за фронтом — индексом 2, соотношения между ними, носящие название Ренкина — Гюгонно, можно представить в виде [31, 35—40],

$$\rho_2 u_{2x} = \rho_1 u_1, \quad (1.5)$$

$$\rho_2 u_{2x}^2 + P_2 + B_{2x}^2/8\pi = \rho_1 u_1^2 + P_1 + B_{1x}^2/8\pi, \quad (1.6a)$$

$$\rho_2 u_{2x} u_{2z} - B_{2x} B_{2z}/4\pi = -B_{1x} B_{1z}/4\pi, \quad (1.6b)$$

$$u_{2x} \left(\frac{\rho_2 u_2^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} P_2 \right) + (u_{2x} B_{2x}^2 - u_{2z} B_{2z} B_{2x})/4\pi = \\ = \frac{\rho_1 u_1^3}{2} + u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} P_1 + u_1 B_{1x}^2/4\pi, \quad (1.7)$$

$$B_{2x} = B_{1x}, \quad u_{2x} B_{2z} - u_{2z} B_{2x} = u_1 B_{1z}. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5)—(1.7) отражают непрерывность потока вещества, импульса и энергии соответственно. Соотношения (1.8) являются следствием уравнений Максвелла

$$\nabla B = 0, \quad [\nabla E] = 0$$

и условия «вмороженности» магнитного поля (1.4).

Для заданных параметров невозмущенной плазмы ρ_1 , P_1 , B_1 , а также скорости ударного фронта u_1 и показателя адиабаты γ_1 соотношения Ренкина — Гюгонно позволяют определить параметры плазмы в области за фронтом. Особенно просто это сделать при отсутствии магнитного поля либо для параллельной ударной волны ($B_{1z}^2/8\pi \ll P_1$). В этом случае величина магнитного поля из соотношений (1.5)—(1.7) выпадает, векторы B_2 и u_2 оказываются направленными, как и в области перед фронтом: вдоль оси X . Если также принять условие равенства показателей адиабаты в областях перед и за фронтом $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то нетрудно получить для степени сжатия вещества на ударном фронте $\sigma = \rho_2/\rho_1 = u_1/u_2$ и теплового давления за фронтом следующие выражения [31, 35—37]:

$$\sigma = (\gamma + 1) M_1^2 / [(\gamma - 1) M_1^2 + 2], \quad (1.9)$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right), \quad (1.10)$$

где

$$M_1 = \frac{u_1}{c_{s1}} = \sqrt{\frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma P_1}} \quad (1.11)$$

— число Маха.

Как видно из выражения (1.9), предельная степень сжатия в случае нерелятивистской полностью ионизованной плазмы, для которой $\gamma = 5/3$, реализуется для сильных ударных волн, когда число Маха $M_1 \gg 1$, и составляет $\sigma = 4$.

Аналогичные соотношения, которые мы здесь в силу их громоздкости не приводим, могут быть получены из условий (1.5) — (1.8) для произвольной ориентации магнитного поля. Отметим только, что предельная степень сжатия в общем случае ниже, чем для параллельной ударной волны, и лежит в пределах 3—4.

§ 3. ПРОЦЕССЫ УСКОРЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ УДАРНОГО ФРОНТА

Возможность ускорения заряженных частиц в бесстолкновительной плазме полностью обусловлена имеющимися в ней электрическими полями, и прежде всего индукционными полями (1.4), возникающими в процессе движения плазмы в крупномасштабном магнитном поле. Ускорение частиц такими полями может реализоваться вблизи ударного фронта. Для иллюстрации этого на рис. 1.2, а схематически изображены в системе покоя ударного фронта структура поперечной плоской ударной волны, распространяющейся против оси X , а также траектория быстрой заряженной частицы в случае, когда мелкомасштабные электромагнитные поля, вызывающие рассеяния частиц, отсутствуют или их роль мала (ламинарная ударная волна).

Для быстрой частицы, скорость которой v много больше скорости плазмы u , а пробег до рассеяния λ и гирорадиус ρ_v много больше толщины фронта l , ударная волна представляет собой магнитогидродинамический разрыв, где магнитное поле, плотность и скорость плазмы по обе стороны ударного фронта связаны соотношениями

$$\rho_2 = \sigma \rho_1, \quad u_2 = u_1/\sigma, \quad B_2 = \sigma B_1.$$

Пересекая ударный фронт, частица испытывает градиентный дрейф и смещается вдоль электрического поля E так, что ее энергия нарастает. Количественно изменение энергии частицы определяется сохранением адиабатического инварианта [20, 21, 24] p_\perp^2/B , где p_\perp — перпендикулярная магнитному полю компонента импульса частицы.

Важно отметить, что сохранение этого инварианта не является следствием адекватности дрейфового приближения [34], которое как раз в силу принятого условия $\rho_v \gg l$ в области ударного фронта непригодно. Инвариантность величины p_\perp^2/B доказывается на основе

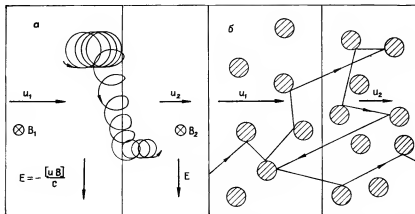


Рис. 1.2. Характер движения быстрой заряженной частицы вблизи фронта ламинарной ударной волны (а) и ударной волны в турбулентной среде (б).

детального анализа траектории движения заряженной частицы при пересечении ею ударного фронта [20], а также результатами численных расчетов [43]. В случае наклонной ориентации магнитного поля по отношению к ударному фронту частица может отражаться фронтом, что также сопровождается увеличением ее энергии [18, 24]. Однако даже при наиболее благоприятном направлении магнитного поля энергия частиц, исключая их незначительную часть, возрастает не более чем на порядок [43, 44]. В условиях ламинарной квазипоперечной ударной волны, в которой магнитное поле составляет малый угол с поверхностью фронта, также могут осуществляться отражения ионов благодаря электрическому полю, возникающему из-за разделения зарядов в области ударного фронта [38, 39, 41, 42]. Несомненно, эти процессы играют определенную роль в формировании структуры ударной волны. Однако однократный характер действия этих механизмов ограничивает их возможности генерации частиц высоких энергий.

Ламинарная ударная волна является, конечно, идеализацией. Для космической плазмы, как уже отмечалось, характерным является наличие помимо регулярного хаотического магнитного поля, образование которого связано с развитием плазменной турбулентности. Существование неоднородностей магнитного поля, рассеивающих частицы, приводит к их изотропизации, а также позволяет частицам многократно пересекать ударный фронт и подвергаться ускорению, которое носит циклический характер. Предельный случай такой ситуации, когда движение частиц полностью определяется их рассеяниями на неоднородностях, схематически изображен на рис. 1.2, б.

Поскольку характерные скорости турбулентных пульсаций порядка альфвеновской $s_a = B/\sqrt{4\pi\rho}$, а в случае сильных ударных

волн $c_a \ll u_{1,2}$, в первом приближении можно считать неоднородности магнитного поля — рассеивающие центры — «вмороженными» в плазму. Кроме того, рассеяния частиц будут упругими в системе отсчета, связанной с рассеивающими центрами, если пренебречь влиянием быстрых частиц на среду, поскольку в этой системе отсчета электрическое поле равно нулю согласно (1.4). Детальное рассмотрение взаимодействия заряженной частицы с магнитогидродинамическими волнами [1, 6, 45] приводит к тому же результату. В этом случае процесс рассеяния полностью аналогичен упругому столкновению с бесконечно тяжелым телом и изменение величины импульса частицы, обусловленное ее рассеянием, будет

$$\Delta p = (p_f - p_i) u/v, \quad (1.12)$$

где u — скорость плазмы; p_i, p_f — импульс частицы до и после рассеяния соответственно, причем, учитывая малость величины Δp (поскольку $u/v \ll 1$), в правой части (1.12) можно считать $p_f = p_i = p$. Нетрудно видеть, что эта формула остается справедливой и для произвольного числа последовательных рассеяний на неоднородностях, имеющих одну и ту же скорость u . Поэтому изменение импульса частицы после двукратного пересечения фронта составит

$$\Delta p = (p_k - p_i) u_1/v + (p_f - p_k) u_2/v.$$

Усреднение этого выражения по потоку частиц через единицу поверхности фронта, который в случае их изотропного распределения выражается через плотность частиц $n(p)$ и угол θ между вектором импульса p и осью X :

$$J(p) = n(p) v \cos \theta,$$

в пределах $\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi$, $\pi/2 \leq \theta_f \leq \pi$, $0 \leq \theta_k \leq \pi/2$ дает среднюю за цикл — двукратное пересечение фронта — величину изменения импульса частицы

$$\langle \Delta p \rangle = \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{v} p. \quad (1.13)$$

Поскольку в ударной волне $u_1 > u_2$, каждый совершаемый частицей цикл пересечения фронта сопровождается увеличением энергии частицы.

Интегральный спектр ускоренных частиц $N(p)$ — количество частиц в единице объема с импульсами, большими p , — может быть найден из уравнения баланса

$$\frac{dN}{dp} = \frac{P_c - 1}{\langle \Delta p \rangle} N, \quad (1.14)$$

где P_c — вероятность совершения очередного цикла. Выражение (1.14) вытекает из очевидного соотношения $N(p + \Delta p) = P_c N(p)$, которое показывает, что количество частиц, способных совершить $(i+1)$ -й цикл пересечения фронта, равно произведению числа частиц, совершивших i циклов, на вероятность совершения следующего цикла.

Для вероятности P_c справедливо равенство $P_c = P_1 P_2$, где P_1 , P_2 — вероятность того, что частица, попавшая в область перед и за фронтом соответственно, вернется обратно к фронту. Вероятность P_1 равна единице, поскольку из области 1 все частицы конвективно сносятся к фронту. Вероятность P_2 можно выразить через поток J_{12} частиц, поступающих из области 1 в область 2, и через направленный поток частиц J_2 в области 2:

$$P_2 = (J_{12} - J_2) / J_{12}.$$

Предположение о том, что распределение частиц за фронтом близко к изотропному и однородному, дает

$$J_{12} = nv/4, \quad J_2 = nu_2.$$

Отсюда вытекает выражение для вероятности совершения следующего цикла:

$$P_c = 1 - 4u_2/v. \quad (1.15)$$

Используя соотношения (1.13) — (1.15), можно получить уравнение для дифференциальной плотности $n = -dN/dp$:

$$\frac{d}{dp}(np) + \frac{3u_2}{u_1 - u_2} n = 0. \quad (1.16)$$

Решением этого уравнения является степенная функция

$$n \sim p^{-1} \quad (1.17)$$

с показателем спектра

$$\gamma = (\sigma + 2) / (\sigma - 1). \quad (1.18)$$

Приведенное рассмотрение, которое с несущественными отличиями можно найти в работах [46—52], иллюстрирует физическое содержание недавно установленного регулярного механизма ускорения [46, 47, 53—55]. В его названии отражен тот факт, что каждый элементарный акт этого процесса — цикл — сопровождается увеличением энергии частицы в отличие от процессов ускорения, в которых набор энергии осуществляется лишь в среднем и имеет статистический характер.

В иностранной научной литературе процесс регулярного ускорения именуется диффузионным ускорением частиц ударной волной либо ускорением Ферми первого рода. В первом из этих вариантов отражен характер пространственного движения ускоряемых частиц, во втором — подчеркнута аналогия с процессом ускорения частицы, испытывающей упругие отражения от двух сближающихся стенок, который получил название механизма ускорения Ферми первого рода, поскольку соответствующая задача впервые была рассмотрена Ферми [56, 57]. Роль одной из стенок, с коэффициентом отражения $K = 1$, выполняет среда перед фронтом, роль другой, с коэффициентом отражения $K = 1 - 4u_2/v$, — среда за фронтом. Заметим, что, какой бы полной ни казалась отмеченная аналогия, реальный прогресс в исследовании явления ускорения заряженных

частиц ударными волнами был достигнут после выхода в свет работ [53, 54].

Приведенный простой анализ показывает важное достоинство регулярного механизма: спектр ускоренных частиц не зависит от параметров среды, в которой распространяется ударная волна. Если к тому же учесть, что для сильных ударных волн степень сжатия лежит в диапазоне $\sigma = 3-4$, то показатель спектра ускоренных частиц $\gamma = 2-3$ будет соответствовать тому, что наблюдается у галактических космических лучей и релятивистских электронов в остатках сверхновых звезд [7]. Это обстоятельство делает регулярный механизм весьма привлекательным для объяснения ряда астрофизических явлений.

Учет хаотических движений рассеивающих центров, которыми ранее пренебрегалось, приводит к дополнительному ускорению быстрых частиц. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть поведение быстрой частицы в системе отсчета, где среда в целом покоится и рассеивающие центры обладают только хаотической компонентой скорости $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$, которая имеет случайную природу и при усреднении обращается в нуль — $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle = 0$.

Используя формулу (1.12) и усредняя по реализациям случайного поля скоростей $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$, можно получить для средней величины изменения импульса и его квадрата выражения

$$\langle \Delta p \rangle = 0, \quad \langle \Delta p^2 \rangle = \frac{4}{3} p^2 \frac{\langle \tilde{u}^2 \rangle}{v^2}. \quad (1.19)$$

Как видно, процесс изменения импульса представляет собой диффузию в импульсном пространстве [22, 23]. Коэффициент диффузии по импульсу $D = 1/2 \langle \Delta p^2 / \Delta t \rangle$ нетрудно выразить через среднее время между рассеяниями τ или коэффициент пространственной диффузии $\kappa = \tau v^2/3$:

$$D \simeq p^2 \frac{\langle \tilde{u}^2 \rangle}{\kappa}. \quad (1.20)$$

Отсюда следует выражение для характерного времени ускорения

$$\tau_s \sim p^2/D \simeq \kappa / \langle \tilde{u}^2 \rangle, \quad (1.21)$$

определяющего средний темп роста импульса

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{p}{\tau_s}.$$

Во всех других несколько более сложных случаях, когда частица взаимодействует не с дискретными рассеивающими центрами [56, 57], а с непрерывно распределенной плазменной турбулентностью того или иного типа [1, 22, 23, 33], процесс ускорения носит тот же статистический характер: акты рассеяния, сопровождающиеся увеличением энергии частицы, сменяются актами ее замедления; лишь в среднем, за большой промежуток времени, энергия частицы возрастает.

Все варианты статистических механизмов имеют единое физическое содержание. Быстрые частицы и рассеивающие центры представляют собой как бы два различных газа. Поскольку рассеивающие центры реализуются в виде макроскопических объемов плазмы, вследствие чего им соответствует бесконечно большая температура, их тепловой контакт с быстрыми частицами, осуществляемый посредством рассеяний, приводит к передаче энергии от рассеивающих центров частицам, т. е. к ускорению последних. Иначе говоря, процесс ускорения выступает здесь аналогом обычного нагрева в условиях столкновительной плазмы. Интересно заметить, что эта аналогия имеет довольно общий характер — нагреву в плазме со столкновениями соответствует в условиях бесстолкновительной плазмы ускорение быстрых частиц. Она прослеживается и на примере регулярного ускорения, а также в случае фрикционного процесса ускорения, который реализуется в условиях сдвигового течения плазмы [58—60].

Темпы статистического и регулярного ускорения соотносятся как $\sim \langle \tilde{u}^2 \rangle / u_1^2$, поскольку, как будет показано в следующей главе, характерное время регулярного ускорения $\tau_a \sim \kappa / u_1^2$ определяется в отличие от (1.21) скоростью ударного фронта u_1 . Поскольку в условиях космической плазмы характерные скорости турбулентных пульсаций \tilde{u} порядка альфвеновской c_a , темп регулярного ускорения в окрестности сильной ударной волны, где $u_1 \gg c_a$, намного превышает темп статистического.

Вопрос об эффективности статистических процессов ускорения в конкретных космофизических объектах довольно сложен, поскольку эффективность прежде всего определяется уровнем и типом плазменной турбулентности, о которой чаще всего имеется весьма ограниченная информация. Кроме того, основная доля энергии в межзвездном пространстве заключена в форме движения больших объемов вещества, в частности в крупномасштабных ударных волнах [61, 62]. Поэтому регулярный механизм ускорения, посредством которого энергия направленного движения среды передается непосредственно быстрым частицам, более предпочтителен.

Во избежание недоразумений заметим, что как в том, так и в другом случае передача энергии макроскопических объемов вещества отдельным заряженным частицам осуществляется посредством взаимодействия частиц с рассеивающими центрами. Поэтому роль турбулентного поля, задача его теоретического описания одинаково важны для обоих механизмов. Большая эффективность процесса регулярного ускорения обусловлена тем, что за счет тех же рассеяний частица черпает энергию направленного движения вещества, запасы которой в сильной ударной волне намного превышают энергию хаотических движений. В этом плане роль статистических механизмов может быть определяющей в образовании популяции надтепловых частиц, которые затем инжектируются в процесс регулярного ускорения.

Таким образом, регулярный механизм ускорения выгодно отличается от других большими возможностями в генерации час-

тиц максимально высокой энергии, высоким темпом ускорения, универсальным видом спектра ускоренных частиц. Именно эти обстоятельства привлекли усилия большого числа исследователей, направленные на создание теоретических основ процесса регулярного ускорения и изучение его астрофизических приложений, которые частично нашли отражение в работах [1, 6, 52, 62—66]. Решение этой задачи столкнулось с рядом сложных проблем. С одной стороны, выяснилось, что некоторые важные аспекты регулярного ускорения, например эффективность, неразрывно связаны с плазменными процессами, протекающими на ударном фронте, описание которых само по себе представляет актуальную задачу в физике плазмы. С другой — во многих случаях она оказывается существенно нелинейной: ускоренные частицы благодаря жесткому характеру их спектра могут влиять на параметры среды в окрестности ударного фронта, существенно модифицируя его структуру.

Хотя о создании исчерпывающей теории регулярного ускорения говорить пока не приходится, тем не менее можно констатировать завершение важного этапа в этом направлении: развит линейный вариант теории, разработаны нелинейные модели регулярного ускорения, способные давать содержательные предсказания, намечены пути решения дальнейших вопросов, стоящих перед теорией ускорения. В настоящей монографии отражено современное состояние теории регулярного ускорения.

Глава 2

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ. ДИФфуЗИОННЫЙ ПОДХОД

Процесс регулярного ускорения частиц ударной волной, как было показано, состоит в передаче энергии направленного движения плазмы быстрым частицам. Последние, в свою очередь, могут оказывать влияние как на внутренние свойства плазмы — уровень турбулентности, так и на структуру ударного фронта — распределение гидродинамической скорости $u(r)$. Поэтому задача о нахождении энергетического и пространственного распределения ускоренных частиц должна решаться одновременно с определением самосогласованного спектра турбулентности и структуры ударного фронта. Лишь в случае, когда плотность энергии ускоренных частиц окажется незначительной по сравнению с энергией направленного движения плазмы, влиянием быстрых частиц можно пренебречь. Эта ситуация может реализоваться, например, тогда, когда количество ускоренных частиц невелико вследствие низкого темпа инжекции тепловых частиц в процесс ускорения. Соответствующий вариант теории — линейная теория или приближение пробных частиц — изложен в настоящей главе.

Процессы переноса быстрых заряженных частиц в космической плазме могут быть достаточно полно и последовательно описаны на основе диффузионного уравнения переноса, что обеспечивается наличием хаотического магнитного поля.

§ 4. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Диффузионный способ описания применим, если достаточно частые рассеяния быстрых частиц на неоднородностях магнитного поля делают их угловое распределение близким к изотропному, так что можно ограничиться первыми двумя угловыми моментами в разложении функции распределения:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{r}, p, t) + f_{\alpha}(\mathbf{r}, p, t) p_{\alpha}/p. \quad (2.1)$$

При этом изотропная часть $f(\mathbf{r}, p, t)$ функции распределения удовлетворяет уравнению [67—71]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_i \kappa_{ij} \nabla_j f - \mathbf{u} \nabla f + \nabla \mathbf{u} \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} + Q, \quad (2.2)$$

а первый момент определяется соотношением [69, 70]

$$f_{\alpha} = -3 \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{v} \nabla_{\beta} f - \frac{u_{\alpha}}{v} p \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (2.3)$$

где κ_{ij} — тензор диффузии частиц; \mathbf{u} — гидродинамическая скорость плазмы; Q — мощность источника частиц, который описывает процессы рождения (инжекции) и уничтожения (выхода из системы) частиц, причем эти процессы могут быть также следствием изменения энергии частиц, за исключением адиабатического изменения.

Первые два члена в правой части уравнения переноса (2.2) представляют привычные процессы — диффузию частиц и их конвекцию. Третий член связан с адиабатическим изменением кинетической энергии ϵ и импульса p частиц в сжимаемой среде, которое характеризуется уравнениями [67, 68, 72, 73]

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = -\frac{\nabla \mathbf{u}}{3} p, \quad \left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle = -\frac{\nabla \mathbf{u}}{3} p v, \quad (2.4)$$

где угловые скобки означают усреднение по промежутку времени, много большему времени между рассеяниями. Эти соотношения показывают, что энергия быстрых частиц в сжимаемой среде меняется аналогично тепловой энергии обычного газа [34]: при сжатии энергия нарастает, при расширении — адиабатически уменьшается. Уравнение переноса (2.2) впервые было получено полуфеноменологическим путем [67, 68], в котором отмеченная аналогия просто — явственно.

Строгий вывод диффузионного уравнения переноса (2.2) базируется на процедуре последовательного усреднения кинетического уравнения по спектру неоднородностей магнитного поля [69, 70].

Использование уравнения (2.2) оказалось весьма плодотвор-

ным для физики космических лучей и позволило исследовать широкий круг процессов в межпланетном пространстве с участием космических лучей [1, 8, 74, 75].

Условием применимости диффузионного подхода служит малость длины пробега частиц до рассеяния λ по сравнению с другими пространственными масштабами задачи, в частности с характерным масштабом $l = |u/\nabla u|$ изменения скорости плазмы. Для быстрых частиц в области ударного фронта условие $\lambda \ll l$ нарушается. Если отвлечься от деталей поведения функции распределения быстрых частиц в пределах тонкого слоя толщиной в несколько пробегов λ , включающего в себя ударный фронт, где уравнение (2.2) неприменимо, то возникает проблема сшивки решений этого уравнения для областей перед и за ударным фронтом [1, 63, 76, 77].

§ 5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА УДАРНОМ ФРОНТЕ

Чтобы установить связь между решениями уравнения переноса в областях за и перед ударным фронтом, рассмотрим общий случай сильной магнитогидродинамической ударной волны с произвольно ориентированным магнитным полем (см. рис. 1.1). Для этого, следуя в основном работе [77], остановимся на некоторых особенностях прохождения быстрой частицы через ударный фронт, который будем считать бесконечно тонким, предполагая, что выполнены условия $\lambda, \rho_v \gg l$.

В соответствии со степенью влияния, которое оказывает регулярное магнитное поле на движение частиц, можно выделить два предельных случая, различающихся соотношением между пробегом до рассеяния λ и гирорадиусом ρ_v .

5.1. Свободное прохождение частиц через ударный фронт. Этот случай реализуется, когда $\lambda \gg \rho_v$, что позволяет пренебречь влиянием рассеяний частицы при ее прохождении через ударный фронт. Под таким прохождением будем понимать движение частицы с момента времени, когда ее ларморовская орбита впервые коснулась поверхности фронта, до того момента, когда ее ларморовское вращение перестает сопровождаться пересечением ударного фронта. Нетрудно видеть, что при наклонной ориентации магнитного поля \mathbf{B} к поверхности фронта в процессе единичного прохождения частица испытывает несколько пересечений с фронтом.

Процесс прохождения частицей фронта удобно исследовать, переходя от системы покоя фронта K_0 к системе отсчета K_E , в которой плоскость фронта по-прежнему неподвижна, а электрическое поле \mathbf{E} равно нулю по обе стороны фронта. Нетрудно убедиться в том, что если оси координат K_0 системы выбраны так, как показано на рис. 1.1, то система K_E должна двигаться относительно ее со скоростью

$$V = u_1 \operatorname{tg} \psi_1 \quad (2.5)$$

в отрицательном направлении оси Z , где ψ_1 — угол между вектором магнитного поля \mathbf{B}_1 и осью X [35]. Система K_E , как видно от-

скуда, существует только при условии $u_1 \operatorname{tg} \psi_1 < c$, которое будем считать выполненным.

Удобство системы отсчета K_E обусловлено возможностью использования сохранения в ней адиабатического инварианта

$$p_{\perp}^2/B = p^2 \sin^2 \theta/B, \quad (2.6)$$

где θ — угол между направлением скорости частицы v и магнитным полем B (питч-угол). Заметим, что сохранение адиабатического инварианта (2.6) не является строгим следствием отсутствия электрического поля, а доказано путем рассмотрения орбит частиц в окрестности фронта на основе уравнения движения. Детальный анализ и результаты численных решений уравнения движения [20, 43, 78] показывают, что величина p_{\perp}^2/B сохраняется с хорошей точностью, за исключением случая, когда одновременно $\psi_1 \sim 1$ и $\theta \ll 1$ [79].

Использование наряду с p_{\perp}^2/B также сохранения кинетической энергии частицы показывает, что из области перед фронтом только частицы, имеющие питч-угол $0 \leq \theta < \theta_0$, где

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - B_1/B_2}, \quad (2.7)$$

могут пройти фронт, частицы с питч-углами $\theta_0 < \theta < \pi/2$ отражаются фронтом [24, 80]. Из области за фронтом все частицы, движущиеся по направлению к фронту ($\pi/2 < \theta \leq \pi$), способны пройти через него. Схематически области питч-углов, соответствующие проходящим и отраженным частицам, изображены на рис. 2.1.

Нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае слабого рассеяния ($\lambda \gg \rho_n$) в системе отсчета K_E вблизи ударного фронта может формироваться сильно анизотропное распределение частиц, что является одной из причин неприменимости здесь диффузионного подхода. Можно предположить, что на расстояниях от фронта, превышающих несколько пробегов λ — в областях слева от плоскости S_1 и справа от плоскости S_2 (см. рис. 2.1), угловое распределение частиц благодаря рассеяниям в достаточной степени изотропируется, так что диффузионное приближение становится применимым.

Предположим также, что, несмотря на возможность рассеяний частиц в области между плоскостями S_1 и S_2 , по-прежнему в среднем наблюдается следующее: частицы, которые вблизи S_1 имеют питч-углы $0 \leq \theta < \theta_0$, проходят через фронт и достигают поверхности S_2 , а частицы с питч-углами $\theta_0 < \theta < \pi/2$ отражаются фронтом; все частицы, движущиеся в области S_2 по направлению к фронту ($\pi/2 < \theta \leq \pi$), проходят через него и достигают плоскости S_1 . Сделанные предположения, строгое обоснование которых хотя и затруднительно, позволяют связать между собой функции распределения частиц f_1 и f_2 , относящиеся к поверхностям S_1 и S_2 соответственно. Для этого удобно ввести величину

$$J(\alpha, \beta, f_j^E) = p^2 \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (vi) f_j^E \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.8)$$

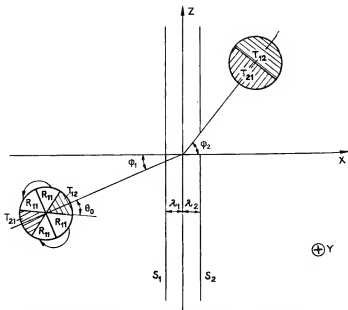


Рис. 2.1. Области питч-углов для случая быстрой магнитогидродинамической ударной волны в системе отсчета K_E ($E = 0$): T_{12} — частицы, свободно пересекающие ударный фронт вдоль по потоку, T_{21} — в обратном направлении; R_{11} — частицы, отраженные ударным фронтом.

представляющую собой плотность потока частиц с питч-углами $\alpha \leq \theta \leq \beta$ в направлении оси X , описываемых функцией распределения f_j^E ($j = 1, 2$), где φ — gyroфаза частицы; i — единичный вектор, направленный по оси X ; индекс E указывает на принадлежность к K_E -системе отсчета. Нетрудно видеть, что в терминах этой величины сделанные выше предположения имеют вид

$$J(0, \theta_0, f_1^E) = J(0, \pi/2, f_2^E), \quad (2.9)$$

$$J(\theta_0, \pi, f_1^E) = J(\pi/2, \pi, f_2^E), \quad (2.10)$$

$$J(0, \pi, f_1^E) = J(0, \pi, f_2^E). \quad (2.11)$$

Если теперь воспользоваться диффузионным приближением (2.1) для функции распределения $f_{1,2}^E$, то из соотношений (2.11) и (2.9) соответственно нетрудно получить условия

$$f_{2x} = f_{1x}, \quad (2.12)$$

$$f_2 = f_1 + \frac{2 \cos^3 \theta_0}{v \cos \psi_2} \left(\frac{u_1}{3} p \frac{\partial f_1}{\partial p} + \kappa_{xx} \nabla_{\alpha} f_1 \right) - \frac{3 (\cos^3 \theta_0 - \cos \theta_0) \sin^2 \psi_1}{v \cos \psi_2} \left(\delta_{\alpha x} - \frac{\delta_{\alpha z}}{\tan \psi_1} \right) \kappa_{\alpha \beta} \nabla_{\beta} f_1, \quad (2.13)$$

связывающие изотропные части $f_{1,2}(\mathbf{r}, p, t)$ и x -компоненты первых моментов $f_{1x,2x}(\mathbf{r}, p, t)$ для областей S_1 и S_2 между собой. Индекс E у этих величин опущен, поскольку из инвариантности функции распределения $f(\mathbf{r}, p, t)$ относительно преобразований системы отсчета следует соотношение

$$f(\mathbf{r}, p, t) = f^E(\mathbf{r}, p, t) + O\left(\frac{V^2}{v^2}\right), \quad (2.14)$$

показывающее, что при переходе к новой системе отсчета изотропная часть функции распределения не меняется с точностью до членов порядка V^2/v^2 , которые пренебрежимо малы, если скорость относительного движения систем отсчета V много меньше скорости частицы (в нашем случае это означает (см. (2.5)) $u_1 \tan \psi_1 \ll v$).

Если отвлечься от деталей в поведении функции распределения частиц в узкой окрестности фронта между поверхностями S_1 и S_2 , то можно считать, что величины $f_{1,2}$ и $f_{1x,2x}$ в соотношениях (2.12) и (2.13) относятся к области ударного фронта, т. е. величины f_1 и f_{1x} берутся при $x = -0$, а f_2 и f_{2x} — при $x = +0$.

Соотношения (2.12) и (2.13) имеют ясный физический смысл. Так, условие (2.12) означает непрерывность потока частиц через ударный фронт, поскольку согласно (2.1) вектор плотности направленного потока частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, p, t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, t) p^2 d\Omega \quad (2.15)$$

однозначно связан с первым моментом функции распределения

$$j_\alpha = \frac{4\pi}{3} v p^2 f_\alpha. \quad (2.16)$$

Условие (2.13) показывает, что различие значений дифференциальной плотности (точнее, дифференциальной концентрации) частиц

$$n(\mathbf{r}, p, t) = \int f(\mathbf{r}, p, t) p^2 d\Omega = 4\pi p^2 f(\mathbf{r}, p, t) \quad (2.17)$$

по обе стороны фронта обусловлено отраженным фронтом частицами. Оно исчезает для параллельной ударной волны ($B_x = B$), поскольку в этом случае $\theta_0 = 0$ (см. (2.7)) и отражения частиц отсутствуют.

Граничное условие (2.12) с учетом выражения (2.3) для первого момента функции распределения, а также с учетом возможного сосредоточенного источника частиц на ударном фронте $Q(p, x) = Q_0(p) \delta(x)$ принимает вид

$$\frac{u_{1x}}{3} p \frac{\partial f_1}{\partial p} + \kappa_{1xx} \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{u_{2x}}{3} p \frac{\partial f_2}{\partial p} - \kappa_{2xx} \frac{\partial f_2}{\partial y} = Q_0. \quad (2.18)$$

5.2. Случай сильного рассеяния. Когда рассеяния частиц происходят столь часто, что длина свободного пробега становится порядка или меньше их гирорадиуса, регулярное магнитное поле перестает оказывать сколько-нибудь существенное влияние на дви-

жение частиц. В этом случае можно считать, что в промежутке между рассеяниями частица движется по прямолинейной траектории, вследствие чего прохождение через ударный фронт не сопровождается изменением энергии частицы.

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, нетрудно прийти к соотношениям

$$J(0, \pi/2, f_1) = J(0, \pi/2, f_2), \quad J(0, \pi, f_1) = J(0, \pi, f_2) \quad (2.19)$$

с тем отличием, что углы α и β , являющиеся аргументами функции $J(\alpha, \beta, f_i)$, теперь отсчитываются от направления оси X . Это приводит к граничным условиям на ударном фронте

$$f_2 = f_1, \quad f_{2x} = f_{1x}, \quad (2.20)$$

в которых величины f_1 , f_{1x} и f_2 , f_{2x} берутся при $x = -0$ и $x = +0$ соответственно.

Таким образом, в низшем порядке по малому параметру $\text{tg } \psi_1 u_1/v \ll 1$ граничные соотношения на ударном фронте представляют собой условия непрерывности плотности и потока частиц.

Хотя рассмотрение общего случая произвольной ориентации магнитного поля особых трудностей не вызывает, в дальнейшем будем касаться лишь квазипараллельных ударных волн, т. е. волн, распространяющихся вдоль магнитного поля. Это связано с тем, что для таких волн движение вещества по обе стороны фронта происходит вдоль одной прямой, а значения скорости связаны простым соотношением $u_2 = u_1/\sigma$, что существенно упрощает расчеты.

§ 6. УСКОРЕНИЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим основные особенности процесса регулярного ускорения частиц плоской ударной волной, распространяющейся в отрицательном направлении оси X . Распределение ускоренных частиц в случае однородной среды будет зависеть только от координаты x . При этом κ_{xx} — единственная компонента тензора диффузии, которая войдет в задачу. Будем для краткости обозначать ее κ и называть коэффициентом диффузии.

6.1. Идеальная ударная волна в неограниченной среде. Уравнение переноса (2.2) в системе покоя ударного фронта с учетом сделанных замечаний примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial x} \right) - u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) p \frac{\partial f}{\partial p} + Q, \quad (2.21)$$

где $\Delta u = u_1 - u_2$, а фронт занимает положение $x = 0$, так что скорость среды в областях перед ($x < 0$) и за фронтом ($x > 0$) имеет постоянные значения

$$u(x < 0) = u_1, \quad u(x > 0) = u_2. \quad (2.22)$$

При этом фактически рассматривается идеальная ударная волна, когда реальной толщиной ее фронта l по сравнению с пробегом

быстрых частиц можно пренебречь ($l \ll \lambda$). Записанное в обобщенном виде ($du/dx = -\Delta u \delta(x)$) это уравнение уже содержит в себе граничные условия (2.20). Однако поскольку практически его решение ищется отдельно в области перед и за ударным фронтом, выпишем граничные условия в явном виде, учитывая также возможность наличия на ударном фронте сосредоточенного источника $Q = Q_0 \delta(x)$. Для этого достаточно выполнить почленное интегрирование уравнения (2.21) по x в пределах от $-\delta$ до δ и устремить δ к нулю, предполагая, что функция $f(x, p, t)$ всюду непрерывна; в результате получим

$$f_2 = f_1, \quad (2.23)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{u_1}{3} p \frac{\partial f_1}{\partial p} = \kappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{u_2}{3} p \frac{\partial f_2}{\partial p} + Q_0. \quad (2.24)$$

Эти соотношения совпадают с полученными в § 5 (2.12), (2.18).

В реальных условиях следует ожидать, что инжекция частиц осуществляется либо на ударном фронте, где плазма разогревается, после чего наиболее быстрые частицы вступают в процесс ускорения, либо за счет ускорения тех быстрых частиц, которые уже имеются в невозмущенной среде. Первая возможность описывается сосредоточенным источником $Q = Q_0 \delta(x)$, вторая — заданием граничного условия

$$f_1(x = -\infty, p) = f_\infty(p), \quad (2.25)$$

показывающего, что на больших расстояниях перед ударным фронтом спектр ускоренных частиц должен переходить в спектр быстрых частиц в невозмущенной среде $f_\infty(p)$.

Стационарное решение уравнения (2.21) по обе стороны ударного фронта можно представить в виде

$$f_i(x, p) = A_i \exp\left(\int_0^x \frac{u_i}{\kappa_i} dx\right) + B_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.26)$$

где величины $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$, являющиеся функциями импульса, должны быть определены из граничных условий. Требование ограниченности функции распределения выполняется при $A_2 = 0$, а граничные условия (2.23) и (2.24) дают

$$B_1 = f_\infty(p), \quad B_2 = A_1. \quad (2.27)$$

Граничное условие (2.24) при использовании соотношений (2.26) и (2.27) превращается в уравнение для функции $B_2(p)$. Его решение позволяет представить функцию распределения быстрых частиц в форме

$$f_1(x, p) = f_2(p) \exp\left(\int_0^x \frac{u_1}{\kappa_1} dx\right) + f_\infty(p) \left[1 - \exp\left(\int_0^x \frac{u_1}{\kappa_1} dx\right)\right], \quad (2.28)$$

$$f_2(p) = \int_0^\infty G(p, p') [f_\infty(p') + Q_0(p')/u_1] dp', \quad (2.29)$$

где

$$G(p, p') = \frac{q}{p'} \left(\frac{p}{p'} \right)^{-q} \theta(p - p'), \quad q = 3u_1/\Delta u, \quad (2.30)$$

— функция Грина задачи ускорения частиц идеальной плоской ударной волной, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Отсюда видно, что различные механизмы инжекции действуют независимо и дают аддитивный вклад в спектр ускоренных частиц. В наиболее простом и вместе с тем интересном случае моноэнергетического спектра инжектируемых частиц

$$Q_0 = u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0), \quad f_\infty = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0)$$

спектр ускоренных частиц имеет вид [53, 54]

$$f_2(p) = \frac{N_0 + N_\infty}{4\pi p_0^2} q \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0). \quad (2.31)$$

Пространственное распределение ускоренных частиц ($p > p_0$), как показывают выражения (2.28) и (2.31), за ударным фронтом однородно, а перед фронтом оно характеризуется тем, что концентрация частиц экспоненциально спадает по мере удаления от фронта. При этом характерное расстояние проникновения частиц в область перед ударным фронтом, которое будем называть диффузионной длиной, определяется значениями скорости ударной волны и коэффициента диффузии частиц

$$L(p) = \kappa_1(p)/u_1.$$

Таким образом, взаимодействие быстрых частиц с ударной волной приводит к их ускорению — моноэнергетический спектр превращается в универсальный степенной, показатель которого

$$q = 3\sigma/(\sigma - 1) \quad (2.32)$$

полностью определяется значением степени сжатия $\sigma = u_1/u_2$. Независимость формы спектра от других параметров задачи, в частности от коэффициента диффузии, — одна из примечательных особенностей регулярного процесса ускорения.

Единая универсальная форма спектра ускоренных частиц во всем диапазоне от p_0 до ∞ является, конечно, следствием идеализированной постановки задачи. Реальная ударная волна лишь приближенно может рассматриваться как плоская и идеальная. Конечность размеров ударной волны и толщины ее ударного фронта накладывает определенные ограничения на процесс регулярного ускорения. Последовательный учет эффектов, вносимых конечностью размеров волны и толщины ее фронта, усложняет описание процесса ускорения, которое будет предпринято в последующих параграфах. Интересно отметить, что эти эффекты, хотя и приближенно, могут быть исследованы в рамках одномерной задачи.

6.2. Эффект конечной толщины ударного фронта может быть частично учтен, если инжекцию частиц описывать источником

$$Q = Q_0 \delta(x - l), \quad (2.33)$$

сосредоточенным на некотором расстоянии l за ударным фронтом. Это соответствует тому, что разогрев тепловой плазмы в реальной ударной волне осуществляется на некоторой характерной длине l , которая имеет смысл толщины фронта.

Нетрудно убедиться в том, что стационарное решение уравнения (2.21) в области за ударным фронтом с граничными условиями (2.23) — (2.25) и источником (2.33), если считать, что источник за фронтом моноэнергетический:

$$Q_2 = u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0),$$

а других источников нет ($f_\infty = 0$), имеет вид

$$f_2(x, p) = \frac{N_0}{4\pi p_0^2} q \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-q} \theta(p - p_0) e^{\frac{-u_2 l}{\kappa_2}} + \frac{\sigma N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \left\{ e^{\frac{u_2(x-l)}{\kappa_2}} \theta(l - x) - e^{\frac{-u_2 l}{\kappa_2}} + \theta(x - l) \right\}. \quad (2.34)$$

В области перед фронтом решение по-прежнему описывается выражением (2.28).

Из выражения (2.34) видно, что удаление источника инжектируемых частиц на расстояние l от ударного фронта приводит к возникновению модулирующего фактора $\exp(-u_2 l / \kappa_2)$, который существенно уменьшает амплитуду ускоренных частиц, если $u_2 l \gtrsim \kappa_2$. Отсюда следует важный вывод о том, что эффективное ускорение возможно только при условии, что диффузионная длина L превосходит толщину ударного фронта $L \gtrsim l$.

6.3. Конечность размеров ударной волны. Ограничения, связанные с конечностью размеров ударной волны R , состоят в том, что если частица в процессе ускорения удаляется от фронта на расстояние, большее R , то она имеет малую вероятность вернуться к фронту и продолжить дальнейшее ускорение. Этот эффект можно приближенно учесть в рамках одномерной задачи, для чего дополним рассмотренную ситуацию введением поглощающей границы, расположенной на расстоянии R перед фронтом. Тогда граничное условие (2.25) заменяется следующим: $f_1(-R, p) = 0$ и стационарное решение уравнения (2.21) в отличие от (2.28) и (2.31) будет иметь вид

$$f_1(x, p) = f_2(p) \frac{\exp(xu_1/\kappa_1) - \exp(-Ru_1/\kappa_1)}{1 - \exp(-Ru_1/\kappa_1)},$$

$$f_2(p) = \frac{N_0}{4\pi p_0^2} q \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-qR} \theta(p - p_0)$$

$$q_R = \frac{3\sigma}{\sigma-1} a, \quad a = [1 - \exp(-Ru_1/\kappa_1)]^{-1}. \quad (2.35)$$

Видно, что наличие поглощающей границы приводит к укрупнению спектра, поскольку $a > 1$. Если коэффициент диффузии является растущей функцией импульса p , что реализуется практически всегда для быстрых частиц, то укрупнение спектра сказывается на частицах с импульсом $p \gtrsim p_m$, где p_m определяется из соотношения $\kappa_1(p_m) = Ru_1$. Поскольку спектр в области $p > p_m$ в этом случае будет быстро спадать, значение p_m имеет смысл максимального импульса ускоренных частиц.

Таким образом, регулярное ускорение эффективно для частиц, диффузионная длина которых лежит в диапазоне

$$l \lesssim L(p) \lesssim R. \quad (2.36)$$

§ 7. ТЕМП РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ

Эффективность того или иного механизма ускорения в конкретных условиях определяется в первую очередь темпом набора энергии ускоряемых частиц. Чем выше этот темп по сравнению с конкурирующими процессами, прежде всего с разного рода процессами потерь энергии, тем существеннее роль механизма ускорения. Кроме того, необходимо исследовать развитие процесса ускорения во времени, поскольку ударные волны являются во многих случаях нестационарными объектами с конечным временем жизни.

Темп регулярного ускорения можно установить путем изучения эволюции спектра ускоренных частиц во времени. Для этого в уравнении (2.24) и граничных условиях (2.23), (2.24) удобно перейти к лаплас-образам [64, 81–86]

$$\bar{f}(x, p, s) = \int_0^\infty f(x, p, t) e^{-st} dt,$$

что дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_i \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x} \right) - u_i \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x} - s \bar{f}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.37)$$

$$\bar{f}_2 = \bar{f}_1,$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x} + \frac{u_1}{3} p \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial p} - \kappa_2 \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x} - \frac{u_2}{3} p \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial p} = \frac{u_1}{s} \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0). \quad (2.38)$$

Как и прежде, значения функции распределения и ее производных, входящие в граничные условия (2.38), берутся в точке $x = 0$. Кроме того, было принято, что моноэнергетический источник частиц

на ударном фронте «включился» в момент времени $t = 0$:

$$Q = u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} (x) \theta(t).$$

Для простоты будем считать, что в невозмущенной среде быстрые частицы отсутствуют, что эквивалентно условию

$$\bar{f}_i(-\infty, p, s) = 0. \quad (2.39)$$

Решение краевой задачи (2.37) — (2.39) для не зависящих от координаты коэффициентов диффузии κ_1 и κ_2 имеет вид [64]:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(x, p, s) = f_2(p) s^{-1} \exp \left\{ -\frac{3}{2} \int_{p_0}^p \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{u_1 - u_2} \frac{dp}{p} + \right. \\ \left. + \left[1 - (-1)^i (A_i + 1) \right] \frac{u_i x}{2\kappa_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $A_i = \sqrt{1 + 4\kappa_i s / u_i^2} - 1$, $f_2(p)$ — стационарный спектр (2.31) на ударном фронте.

Поведение решения при больших значениях времени ($t \gg \gg 4\kappa_i / u_i^2$) можно установить, используя для величин A_i приближенное выражение $A_i \simeq 2\kappa_i s / u_i^2$, что позволяет легко выполнить обратное преобразование Лапласа [64, 85]:

$$f_1(x, p, t) = f_2(p) \exp(xu_1/\kappa_1) \theta(t - t_a), \quad (2.41)$$

$$f_2(x, p, t) = f_2(p) \theta(t - x/u_2 - t_a), \quad (2.42)$$

где

$$t_a = \frac{3}{u_1 - u_2} \int_{p_0}^p \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right) \frac{dp}{p} \quad (2.43)$$

— время, необходимое для ускорения частицы от значения импульса p_0 до p . Отсюда видно, что в каждый момент времени t на фронте ударной волны в области импульсов $p_0 \leq p \leq p_m(t)$ устанавливается стационарный универсальный спектр $f \sim p^{-2}$, причем максимальный импульс, который определяется соотношением $t = t_a(p_m)$, растет во времени в соответствии с уравнением

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{p_m}{\tau_a}, \quad (2.44)$$

вследствие чего величина

$$\tau_a = \frac{3}{u_1 - u_2} \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right) \quad (2.45)$$

имеет смысл характерного времени ускорения.

Реальный характер спектра ускоренных частиц в области импульсов $p \gg p_m(t)$ при конечных значениях времени t можно установить, выполняя обратное преобразование Лапласа функции (2.40). Для области ударного фронта $x=0$ при не зависящих от импульса коэффициентах диффузии это дает

$$f(0, p, t) = f_2(p) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\nu} \frac{a_1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{a_2}{2\sqrt{t'}} + b_2 \sqrt{t'} \right) e^{a_2 b_2} + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{a_2}{2\sqrt{t'}} - b_2 \sqrt{t'} \right) e^{-a_2 b_2} \right] \exp \left[-\frac{a_1^2}{4(t-t')} - b_1^2(t-t') \right] \times \\ \times (t-t')^{-3/2} dt', \quad (2.46)$$

где $\nu = \frac{3(\sigma+1)}{4(\sigma-1)}$, $a_i = \frac{3\sqrt{\kappa_i}}{\Delta u} \ln \frac{p}{p_0}$, $b_i = \frac{u_i}{2\sqrt{\kappa_i}}$, $i = 1, 2$,

$\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности [87]. Интегрируя это выражение методом перевала для времен $t \gg \tau_a$, можно прийти к следующему соотношению:

$$f_1(0, p, t) \simeq \frac{f_2(p)}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\nu' \ln(p/p_0)}{\sqrt{t/t_0}} - \sqrt{t/t_0} \right], \quad (2.47)$$

в котором

$$t_0 = \frac{4\kappa_1}{u_1^2}, \quad \nu' = \frac{3(\sigma+1)}{4(\sigma-1)} \quad \text{при} \quad \frac{\kappa_1}{u_1^2} = \frac{\kappa_2}{u_2^2}; \\ t_0 = \frac{4\kappa_1}{u_1^2}, \quad \nu' = \frac{3\sigma}{4(\sigma-1)} \quad \text{при} \quad \frac{\kappa_1}{u_1^2} \gg \frac{\kappa_2}{u_2^2}; \\ t_0 = \frac{4\kappa_2}{u_2^2}, \quad \nu' = \frac{3}{4(\sigma-1)} \quad \text{при} \quad \frac{\kappa_1}{u_1^2} \ll \frac{\kappa_2}{u_2^2}.$$

Отсюда видно, что в области импульсов $p_0 \leq p \leq p_m(t)$ спектр ускоренных частиц на ударном фронте $f(0, p, t)$ совпадает со стационарным $f_2(p)$. При больших значениях импульса $p > p_m(t)$ становится существенным отклонение $f(0, p, t)$ от $f_2(p)$, причем при $p \gg p_m(t)$ приближенно можно записать

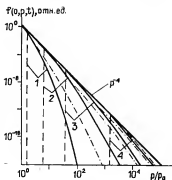
$$f(0, p, t) \simeq f_2(p) \frac{\sqrt{t/t_0}}{2\nu' \ln(p/p_0)} \exp \left[-\nu'^2 \ln^2(p/p_0) \frac{t}{t_0} \right].$$

С той точностью, с которой справедливо выражение (2.47), в точке $p = p_m$ отношение $f(0, p_m, t)/f_2(p_m)$ не зависит от времени и составляет 1/2. Скорость отклонения функции $f(0, p, t)$ от стационарного спектра $f_2(p)$ при увеличении импульса в области $p > p_m$ можно характеризовать шириной Δp , в пределах которой отношение $f(0, p, t)/f_2(p)$ уменьшается в заданное число раз A :

$$\Delta \left(\frac{f}{f_2} \right) / \left(\frac{f}{f_2} \right) = A,$$

Рис. 2.2. Спектр ускоренных частиц на фронте плоской ударной волны со степенью сжатия $\sigma = 4$ для ряда значений времени с момента инжекции:

$t/\tau = 0,5$ (1), 2 (2), 5 (3), 8 (4). Сплошные кривые соответствуют точному (2.46), штрихпунктирные — приближенному (2.47) решению уравнения переноса, штриховые линии показывают положение максимального импульса в каждый момент времени.



где $\Delta f = f(p_m + \Delta p) - f(p_m) \simeq \frac{\partial f}{\partial p} \Delta p$. Принимая $A = 1$, из выражения (2.47) нетрудно установить, что характерная ширина области спада спектра $\Delta p \simeq p_m \sqrt{\pi \ln \frac{p_m}{p_0} / v'}$ растет со временем, причем даже быстрее, чем импульс p_m .

Соотношение приближенного (2.47) и точного результата, который получается путем выполнения численного интегрирования в выражении (2.46), а также динамика установления стационарного спектра приведены на рис. 2.2. Как видно, во всей практически важной области импульсов, где спектр не слишком сильно отклоняется от стационарного, выражение (2.47) хорошо аппроксимирует точный спектр; вместе с тем область спада Δp для широкого диапазона времен t/τ_a может быть весьма протяженной, так что следует учитывать наличие существенного количества частиц с импульсами $p > p_m$ в реальном спектре $f_{1,2}(x, p, t)$.

§ 8. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ С ФРОНТОМ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Ускорение частиц ударной волной с фронтом конечной толщины имеет существенное значение при решении двух важных задач. Первая из них связана с инжекцией частиц в режим ускорения. В случае, когда осуществляется инжекция надтепловых частиц из разогретой на ударном фронте плазмы, следует ожидать, что влияние конечности толщины фронта l сильно скажется на поведении инжектированных частиц, поскольку их пробег до рассеяния сравним с l . Вторая — с влиянием толщины фронта, которая в некоторых случаях (если ускоренным частицам будет передана заметная часть полной энергии в ударной волне) бывает существенной и для энергичных ускоренных частиц. При этом ударный фронт будет модифицирован их давлением, так что реальная его толщина станет сравнимой с диффузионной длиной $L \simeq \kappa/u$ быстрых частиц.

Можно ожидать два наиболее важных эффекта в процессе ускорения, связанных с конечностью толщины фронта. Прежде

всего, конечная протяженность фронта снижает вероятность P_2 того, что частица из области за фронтом вернется в область перед фронтом. Что касается частиц, которые проникают в область фронта, но не достигают его переднего края, то они получают меньшее приращение импульса Δp . Как та, так и другая причина (см. формулы § 3) ведут к снижению эффективности процесса ускорения и обуславливают более крутой вид энергетического спектра.

8.1. Приближенный метод. Изучение влияния конечной толщины ударного фронта сводится к исследованию регулярного ускорения плоской ударной волной, в которой скорость среды $u(x)$ плавно меняется от значения $u_1 = u(-\infty)$ до $u_2 = u(\infty)$ на характерной длине l . Задача состоит в решении стационарного уравнения переноса, записанного в системе покоя фронта:

$$\kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (2.48)$$

в котором для простоты коэффициент диффузии κ принят не зависящим от импульса и координаты. Наиболее простой способ инъекции задается краевым условием

$$f(-\infty, p) = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0), \quad (2.49)$$

соответствующим ситуации, когда ускорению подвергаются быстрые частицы с концентрацией N_∞ и импульсом p_0 , уже имеющиеся в невозмущенной среде.

Подстановкой $f(x, p) = \exp\left(\int \frac{u}{\kappa} dx\right) \varphi(x) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-3\lambda}$, допускающей разделение переменных, уравнение переноса в этом случае сводится к стандартной самосопряженной задаче Штурма — Лиувилля:

$$\kappa \frac{d}{dx} \left(e^{\int \frac{u}{\kappa} dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) - (\lambda - 1) \frac{du}{dx} e^{\int \frac{u}{\kappa} dx} \varphi = 0.$$

В силу физических условий, означающих отсутствие ускоренных частиц перед ударным фронтом и однородность их пространственного распределения за фронтом

$$f(x = -\infty, p) = 0, \quad \frac{df(x = \pm \infty, p)}{dp} = 0,$$

функция φ удовлетворяет краевым условиям типа Штурма

$$\varphi(x = \infty) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}(x = -\infty) = 0. \quad (2.50)$$

Пользуясь общей теорией задачи Штурма — Лиувилля (см., например, [88]), нетрудно показать, что в нашем случае собственные значения λ образуют дискретный монотонно возрастающий ряд $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, причем наименьшее из них может быть найдено

на основе вариационного принципа Рэлея — Ритца:

$$\lambda_0 = \min_{-\infty}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[\kappa \frac{d}{dx} \left(e^{\int_{\kappa}^u dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{d\varphi}{dx} e^{\int_{\kappa}^u dx} \varphi \right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 e^{\int_{\kappa}^u dx} \frac{du}{dx} dx}. \quad (2.51)$$

Значение λ_0 представляет в рассматриваемой задаче особый интерес — оно определяет форму спектра ускоренных частиц в области больших значений импульсов: $f(x, p) \rightarrow C p^{-3\lambda_0}$ при $p \rightarrow \infty$. Искомое значение λ_0 может быть надежно оценено варьированием в выражении (2.51) параметризованной функции φ . Поскольку функция φ_0 , отвечающая наименьшему собственному значению λ_0 , не должна иметь узлов, ее можно выбрать в форме

$$\varphi_0 = \exp \left(- \int \frac{u}{\kappa} dx + \alpha \int \frac{u - u_2}{\kappa} dx \right). \quad (2.52)$$

Видно, что при $\alpha > 0$ необходимые условия (2.50) выполнены. Подставляя в таком виде функцию φ_0 в выражение (2.51), можно получить

$$\lambda_0 = \min \left[\alpha - \frac{\alpha^2 \Delta u^2 - \lambda u_1 \Delta u}{(2\alpha - 1) u_1 - 2\alpha u_1} + \frac{l u_1 u_2}{\kappa \Delta u} \right] \simeq \frac{u_1}{\Delta u} \left(1 + \frac{l u_2}{\kappa} \right). \quad (2.53)$$

Входящая сюда величина l определялась в соответствии с выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_{\kappa}^u dx} \frac{du}{dx} x^{\beta} dx = - \Delta u l^{\beta} \exp \left(\frac{u_1 + u_2}{\kappa} l \right),$$

откуда видно, что l — характерный масштаб изменения скорости среды u , т. е. толщина фронта.

Таким образом, влияние конечной толщины ударного фронта, как следует из выражения (2.53), состоит в том, что спектр ускоренных частиц в области больших импульсов

$$f \sim p^{-q_0}, \quad q_0 = 3\lambda_0 \simeq \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left(1 + \frac{l u_2}{\kappa} \right)$$

становится более крутым. Укрупнение спектра реально сказывается на частицах, имеющих коэффициент диффузии $\kappa \ll l u_2$, что полностью совпадает с выводом, полученным в п. 6.3.

8.2. Точное решение. Задача об ускорении частиц ударной волной с конечной толщиной ударного фронта допускает точное решение, если профиль скорости среды описывается гиперболическим тангенсом

$$u(x) = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{th} \frac{x}{l}, \quad (2.54)$$

где параметр l задает характерный пространственный масштаб, в пределах которого осуществляется изменение скорости u от значения u_1 до u_2 .

Уравнение переноса (2.48), если перейти к новым переменным $s = 3 \ln(p/p_0)$ и $y = (u_1 - u)/(u_1 - u_2)$, запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \beta \frac{\partial}{\partial y} \left[y(1-y) \frac{\partial f}{\partial y} \right] - (\alpha\beta - y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2.55)$$

где

$$\beta = \frac{2\kappa}{(u_1 - u_2)l}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{\beta(\sigma - 1)}. \quad (2.56)$$

Краевое условие (2.49) в новых переменных примет вид

$$f(0, s) = \frac{3N_\infty}{4\pi p_0^3} \delta(s). \quad (2.57)$$

Решение уравнения (2.55) может быть найдено с помощью преобразований Лапласа, что и было сделано в работе [89], где эта задача впервые была рассмотрена. Мы же здесь приведем, на наш взгляд, более простую и наглядную процедуру получения решения методом разделения переменных. Для этого функцию распределения представим в таком виде:

$$f(y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(y) \exp(-\lambda_n s), \quad (2.58)$$

что задача сведется к отысканию собственных функций Ψ_n и собственных значений λ_n , являющихся ограниченным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[y(1-y) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] - \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\lambda}{\beta} \Psi &= 0, \\ \Psi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что решение выражается через полиномы Якоби

$$\Psi_n = A_n y^\alpha G_n(r, q, y); \quad \lambda_n = \beta(n + \alpha)(n + \alpha - 1 - 1/\beta), \quad (2.59)$$

где

$$r = 1 + 2\alpha - 1/\beta, \quad q = 1 + \alpha. \quad (2.60)$$

В явном виде полиномы Якоби [87] $G_n(r, q, y) = \sum_{m=0}^n b_n^m(r, q) y^{n-m}$ имеют коэффициенты

$$b_n^m(r, q) = (-1)^m C_m^n \frac{\Gamma(n+q)\Gamma(2n-m+r)}{\Gamma(2n+r)\Gamma(n-m+q)},$$

выражающиеся через гамма-функцию $\Gamma(x)$ и биномиальные коэффициенты C_m^n .

Для нахождения коэффициентов A_n необходимо использовать свойство ортогональности полиномов с весом $y^\alpha(1-y)^{\alpha-1/\beta}$:

$$\int_0^1 dy y^\alpha (1-y)^{\alpha-1/\beta} G_n(r, q, y) G_{n'}(r, q, y) = \delta_{nn'} \frac{n! \Gamma(n+q) \Gamma(n+r) \Gamma(n+1+r-q)}{(2n+r) \Gamma^2(2n+r)}. \quad (2.61)$$

При этом удобно переформулировать краевое условие (2.57), перейдя от $f(0, s)$ к $f(y, 0)$. Для этого достаточно выполнить почленное интегрирование уравнения (2.55) по s в пределах от 0 до ∞ и по y — от 0 до $\delta > 0$. Последующее устремление величины δ к нулю дает

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\delta f(y, 0) dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha \beta \int_0^\infty ds f(s, 0), \quad (2.62)$$

и краевое условие для функции $f(y, s)$ может быть записано следующим образом:

$$f(y, 0) = \frac{3N_\infty}{4\pi p_0^3} \alpha \beta \delta(y). \quad (2.63)$$

Используя (2.61), нетрудно найти значения коэффициентов разложения

$$A_n = (-1)^n \frac{3N_\infty}{4\pi p_0^3} \frac{\alpha \beta}{n!} \frac{\Gamma(2n+1+r)}{\Gamma(q) \Gamma(n+1+r-q)}. \quad (2.64)$$

Соотношения (2.58) — (2.60), (2.64) дают полное решение поставленной задачи. В частности, спектр частиц за ударным фронтом $f_2(s) = f(1, s)$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(s) = & \frac{N_\infty}{4\pi p_0^3} \frac{3u_1}{u_1 - u_2} \exp \left[-\frac{su_1}{u_1 - u_2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_2}{u_1 - u_2} \right) \right] \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} + 2n \right) \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} + n \right) \times \\ & \times \exp \left[-sn \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} - sn\beta(n+1) \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Остановимся на анализе наиболее интересных предельных случаев, когда громоздкое выражение (2.65) существенно упрощается. Если частицы имеют достаточно большой коэффициент диффузии, так что их диффузионная длина $L = \kappa/u$ много больше толщины фронта l , т. е. $\beta \gg 1$, то спектр (2.65) принимает вид

$$f_2(s) = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^3} \frac{3u_1}{u_1 - u_2} \exp \left(-\frac{su_1}{u_1 - u_2} \right), \quad (2.66)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает со спектром (2.31) для идеальной ударной волны.

В противоположном предельном случае $L \ll l$, $\beta \ll 1$

$$f_2(s) = \frac{3N_\infty}{4\pi p_0^3} \delta\left(s - \ln \frac{u_1}{u_2}\right). \quad (2.67)$$

Как видно, спектр частиц остался моноэнергетическим, причем это справедливо для любой точки в пространстве. Данный результат нетрудно понять, если учесть, что при $x \ll lu$ диффузионным перемещением быстрых частиц можно пренебречь по сравнению с их конвекцией — перемещением вместе со средой со скоростью u . Это позволяет, используя выражение (2.4) для скорости адиабатического изменения величины импульса, вычислить импульс частиц в каждой точке x :

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^t \frac{du}{dx} dt = -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^x \frac{du}{dx} \frac{dx}{u} = \frac{1}{3} \ln \frac{u_1}{u},$$

что и отражено в выражении (2.67).

При произвольном значении параметра β высокоэнергичная часть ($p \rightarrow \infty$) спектра (2.65) определяется первым членом ряда

$$f_2(s) = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^3} \frac{3u_1}{u_1 - u_2} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\beta} \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_1}{u_1 - u_2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_2}{u_1 - u_2}\right)} \times \\ \times \exp\left[-\frac{su_1}{u_1 - u_2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_2}{u_1 - u_2}\right)\right]. \quad (2.68)$$

Отсюда видно, что спектр по импульсу имеет степенной вид $f_2(p) \sim p^{-q}$ с показателем

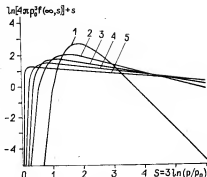
$$q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{u_2}{u_1 - u_2}\right), \quad (2.69)$$

который при больших значениях β близок к значению $3\sigma/(\sigma - 1)$, как в случае идеальной ударной волны. При уменьшении параметра β показатель спектра q увеличивается и при $\beta < 1$ существенно превышает значение $3\sigma/(\sigma - 1)$. Укручение спектра, а также уменьшение его амплитуды говорят о снижении эффективности ускорения. Необходимым условием эффективного ускорения является $\beta \gg 1$, что означает большую величину диффузионной длины $L = \kappa/u$ по сравнению с толщиной фронта l : $L \gg l$.

Характер спектра ускоренных частиц в области за ударным фронтом ($x = \infty$) показан на рис. 2.3, взятом из работы [89]. Как

Рис. 2.3. Спектр частиц за фронтом ударной волны со степенью сжатия $\sigma = 7$ для значений безразмерного коэффициента диффузии β :

$\beta = 0,1$ (1), $0,5$ (2), $1,0$ (3), $2,0$ (4), 10 (5) [89].



видно, в области значений импульсов $p/p_0 \gg 1$ спектр имеет степенную форму с показателем, соответствующим формуле (2.69). Кроме того, область импульсов, где велико отличие формы спектра от степенного закона, сужается при увеличении параметра β .

§ 9. РЕГУЛЯРНОЕ УСКОРЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Регулярное ускорение в реальных условиях может сопровождаться другими, также обуславливающими изменение энергии частиц процессами, и прежде всего различного рода процессами потерь энергии. Другим примером могут служить механизмы ускорения, протекающие параллельно регулярному ускорению.

Выяснение роли конкурирующих процессов фактически дает ответ на важный вопрос о том, насколько эффективно регулярное ускорение в конкретных физических условиях.

9.1. Модель катастрофических соударений. Можно ожидать, что роль того или иного процесса будет тем значительнее, чем выше соответствующий ему темп изменения импульса или энергии частиц

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle_i = \pm \frac{p}{\tau_i}. \quad (2.70)$$

Здесь знак «плюс» относится к процессам ускорения, а знак «минус» — к процессам потерь энергии, так что положительная величина τ_i представляет собой характерное время изменения импульса частицы в i -м процессе.

Процедура учета какого-либо процесса состоит в том, что в уравнение переноса добавляются члены, описывающие изменения функции распределения частиц $(\partial f / \partial t)_i$ за счет этого процесса. Наиболее простой способ учета энергетических потерь частиц состоит в выборе добавочного члена в форме [90, 91]:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i = - \frac{f}{\tau_i}. \quad (2.71)$$

При этом диффузионное уравнение в стационарном одномерном случае примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial x} \right) - u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{du}{dx} \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{f}{\tau_i} + Q = 0. \quad (2.72)$$

Нетрудно понять, что добавленный в уравнение член описывает не только потери энергии, но и гибель самих частиц. Принятое приближение (2.71) отвечает ситуации, когда энергия частиц теряется большими порциями — в среднем через время τ_i каждая частица испытывает катастрофические акты, в результате которых она теряет всю энергию и тем самым перестает существовать.

Энергетические потери, имеющие реальное значение для быстрых заряженных частиц в космической плазме, такие как потери из-за кулоновских столкновений или потери на синхротронное излучение, осуществляются малыми порциями практически непрерывно. Поэтому такого рода процессы лишь приближенно могут быть описаны в рамках модели катастрофических соударений. Вместе с тем последняя позволяет достаточно просто исследовать роль того или иного механизма потерь.

Если, как и прежде, ограничиться случаем моноэнергетического источника частиц на фронте идеальной плоской волны

$$Q = u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \delta(x),$$

нетрудно получить решение уравнения (2.72), считая для простоты, что коэффициент диффузии $\kappa_{i,2}$ и характерное время потерь энергии $\tau_{i,2}$ в каждой из областей — перед и за фронтом — не зависят от координаты:

$$f_i(x, p) = f_0(p) \exp \left[-\frac{u_i}{\kappa_i} (2 - i + A_i) |x| \right], \quad i = 1, 2, \quad (2.73)$$

где спектр частиц на ударном фронте $f_0(p) = f_{i,2}(x=0, p)$ имеет вид

$$f_0(p) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} q \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0) \exp \left(-\frac{3}{2} \int_{p_0}^p \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{u_1 - u_2} \frac{dp'}{p'} \right), \quad (2.74)$$

$$q = 3\sigma/(\sigma - 1), \quad A_i = \sqrt{1 + 4\kappa_i/u_i^2 \tau_i} - 1.$$

Эти выражения наглядно показывают, как сказываются энергетические потери на распределении ускоренных частиц в пространстве и их спектре. Наличие потерь обуславливает более быстрое спадание концентрации частиц при удалении от ударного фронта, что описывается фактором $\exp(-|x|u_i A_i/\kappa_i)$ в выражении (2.73). Спектр частиц становится более крутым. В случае не зависящих от импульса $\kappa_{i,2}$ и $\tau_{i,2}$ спектр сохраняет степенной вид $f_0 \sim p^{-q}$ с

показателем $q' = q + \Delta q$, который превышает универсальное значение $q = 3\sigma/(\sigma - 1)$ на величину $\Delta q = \frac{3}{2} \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{u_1 - u_2}$.

Эффекты, вызываемые энергетическими потерями, характеризуются параметрами $A_{1,2}$. Они становятся ощутимыми только при условии $A_{1,2} \gtrsim 1$, что, в свою очередь, обеспечивается при $\tau_{1,2} \leq \leq \kappa_{1,2}/u_{1,2}^2$. В противоположном случае

$$\tau_{1,2} \gg \kappa_{1,2}/u_{1,2}^2, \quad (2.75)$$

когда характерное время потерь намного превышает время ускорения, энергетические потери практически не сказываются на процессе регулярного ускорения.

9.2. Последовательный учет энергетических потерь. Строгое описание процессов, сопровождающихся изменением энергии быстрых частиц (набор и потери энергии), основано на использовании уравнения Фоккера — Планка [92], которое в одномерном случае имеет вид [34]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial x} - u f \right) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{p}{3} - F \right) p^2 f + D p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \right] + Q, \quad (2.76)$$

где величины $F = \left\langle \frac{\Delta p}{\Delta t} \right\rangle$, $D = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\Delta p^2}{\Delta t} \right\rangle$ представляют собой усредненный темп изменения величины импульса (ее также называют силой динамического трения) и коэффициент диффузии в импульсном пространстве. Член $\frac{du}{dx} \frac{p}{3}$, характеризующий адиабатическое изменение величины импульса, выделен для удобства, чтобы подчеркнуть, что в отсутствие потерь энергии ($F = 0$) и статистического ускорения ($D = 0$) оно принимает вид обычного уравнения переноса (2.2).

Решить уравнение (2.76) даже в простейших случаях более сложно, чем уравнение (2.72). Чтобы выяснить, как соотносятся между собой более последовательное описание на основе уравнения (2.76) с более простым (2.72), рассмотрим задачу о регулярном ускорении при наличии потерь, характерное время которых τ не зависит от импульса

$$F = -p/\tau. \quad (2.77)$$

Такую форму имеют, в частности, кулоновские потери в области низких энергий.

Уравнение (2.76), записанное для функции $\Psi = p^2 f$, в стационарном случае идеальной ударной волны с моноэнергетической инжекцией частиц на ударном фронте имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} - u \Psi \right) + p \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{\tau} - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) \right] \Psi + \frac{u_1 N_0}{4\pi} \delta(x) \delta(p - p_0) = 0. \quad (2.78)$$

Его можно решить, переходя к фурье-образам

$$\bar{\Psi}(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, p) e^{iv \ln p} d \ln p,$$

что дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} - u \bar{\Psi} \right) - iv \left[\frac{1}{\tau} - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) \right] \bar{\Psi} + \frac{u_1 N_0}{\sqrt{32\pi^3}} \delta(x) e^{iv \ln p_0} = 0. \quad (2.79)$$

Ограниченное всюду решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$\bar{\Psi}_j = C \exp \left[\frac{x u_j}{\kappa_j} (2 - j - (-1)^j B_j) \right], \quad j = 1, 2, \quad (2.80)$$

где

$$B_j = \left(\sqrt{1 + i4v\kappa_j/\tau\mu_j^2} - 1 \right) / 2. \quad (2.81)$$

Неизвестную величину C , являющуюся функцией v , нетрудно определить, интегрируя уравнение (2.79) по x от $-\delta$ до δ и устремляя затем δ к нулю, используя при этом выражения (2.80) и (2.81), что дает

$$C = \frac{N_0 u_1}{\sqrt{8\pi^3} \Delta u (1 + i2v/3) - u_1 \sqrt{1 + i4v\alpha_1} - u_2 \sqrt{1 + i4v\alpha_2}}, \quad (2.82)$$

где $\alpha_j = 4\kappa_j/(\tau\mu_j^2)$.

Обратное преобразование фурье-функции (2.80) относительно просто удастся произвести, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. В таком случае, выполняя эту процедуру методом контурного интегрирования, приходим к следующему выражению для функции распределения:

$$\begin{aligned} f_j(x, p) = & \frac{N_0}{4\pi p_0^3} \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left[1 - \frac{3\alpha(\sigma + 1)}{4(\sigma - 1)(2A + 1)} \right]^{-1} \times \\ & \times \exp \left[\frac{x u_j}{\kappa_j} (2 - j - (-1)^j A) \right] \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\mu_1} \theta(p_0 - p) \operatorname{erfc} \left[(2A + 1) \sqrt{\frac{\ln p_0/p}{\alpha}} - \right. \\ & - \frac{u_j |x|}{4\kappa_j} \sqrt{\frac{\alpha}{\ln p_0/p}} \left. \right] + \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \frac{3(\sigma + 1)}{2(\sigma - 1)(2A + 1)} \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\mu_2} \theta(p_0 - p) \times \\ & \times \exp \left[-\alpha \frac{3(\sigma + 1)}{4(\sigma - 1)} \frac{|x| u_j}{\kappa_j} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{|x| u_j}{4\kappa_j} \sqrt{\frac{\alpha}{\ln p_0/p}} + \right. \\ & + \left. \left(2A + 1 - \frac{3\alpha(\sigma + 1)}{2(\sigma - 1)} \right) \sqrt{\frac{\ln p_0/p}{\alpha}} \right] \Big\}, \quad (2.83) \end{aligned}$$

где

$$A = \left[\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha(\sigma+1)}{4(\sigma-1)}\right)^2 + \frac{3\alpha}{\sigma-1}} + \frac{3\alpha(\sigma+1)}{4(\sigma-1)} - 1 \right] / 2,$$

$$q = -\mu_1 = [3\sigma/(\sigma-1)] [1 + A(\sigma+1)/\sigma], \mu_2 = \frac{3}{\sigma-1} \left[1 + (\sigma+1)A - \frac{3(\sigma+1)^2\alpha}{4(\sigma-1)} \right],$$

$\text{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности [87].

Наличие процесса потерь энергии, как видно из выражения (2.83), обуславливает ряд особенностей в спектре частиц вблизи ударного фронта: спектр ускоренных частиц ($p > p_0$) становится более крутым, его показатель

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma-1} \left[1 + \frac{3\alpha(\sigma+1)}{4\sigma(\sigma-1)} \right] + O(\alpha^2) \quad (2.84)$$

является растущей функцией параметра α .

Помимо ускоренных в спектре имеются замедленные частицы, имеющие импульсы меньше импульса инжекции p_0 . Относительное количество этих частиц также определяется параметром α . Так, при значениях параметра $\alpha \ll 1$ спектр быстро — как $p^{1/\alpha}$ — спадает к нулю с уменьшением импульса в области $p < p_0$.

По сравнению со случаем отсутствия потерь, пространственное распределение ускоренных частиц за ударным фронтом становится неоднородным — их концентрация падает при удалении от фронта. Более быстрым становится спад концентрации частиц в области перед ударным фронтом. Этот эффект определяется фактором $\exp(-|x|u_1A/\kappa_1)$ в функции распределения (2.83) и тоже характеризуется величиной параметра α , поскольку $A = (3/2)\alpha/(\sigma-1) + O(\alpha^2)$.

Сравнивая выражения (2.73) и (2.83), можно прийти к заключению, что основные эффекты, вызванные энергетическими потерями частиц в процессе их ускорения, достаточно хорошо описываются в рамках простой модели катастрофических потерь. При этом роль потерь зависит от значения параметра α , который представляет собой отношение τ_a/τ характерных времен процессов ускорения и энергетических потерь. Для области энергий, где $\tau_a \ll \tau$, потери несут существенны, напротив, для энергий, при которых $\tau_a \gg \tau$, ускорение становится малоэффективным.

9.3. Статистическое ускорение в окрестности ударного фронта. Как уже отмечалось, хаотическое движение неоднородностей магнитного поля, рассеивающих частицы, приводит к их дополнительному ускорению. Физическая сущность этого процесса, который получил название механизма ускорения Ферми второго порядка, состоит в передаче тепловой энергии от «газа» рассеивающих центров газу быстрых частиц, тепловой контакт между которыми осуществляется посредством рассеяний.

В космической плазме роль рассеивающих центров выполняет главным образом магнитогидродинамическая турбулентность, генерация которой происходит за счет развития тех или иных плазменных неустойчивостей. Суть процесса ускорения, когда частицы

взаимодействуют не со сгустками вещества с «вмороженным» в них магнитным полем, а с плазменными волнами, остается прежней. Именно поэтому, все разновидности статистического ускорения, различающиеся типом плазменной турбулентности, допускают единую математическую трактовку — статистическое ускорение представляет собой диффузию в импульсном пространстве [22, 23, 58, 59, 93—104], которой в уравнении Фоккера — Планка для функции распределения быстрых частиц (2.76) соответствует член

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(D p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (2.85)$$

Домножая обе части этого уравнения на $4\pi p^2$ и интегрируя по p в пределах от 0 до ∞ , приходим к заключению, что диффузия в пространстве импульсов сопровождается ростом среднего импульса в соответствии с уравнением

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{p}{\tau_s}, \quad \tau_s = p^3 \left[\frac{d}{dp} (D p^2) \right]^{-1}. \quad (2.86)$$

Коэффициент диффузии частиц по импульсу D тем больше, чем выше уровень плазменной турбулентности. Поэтому можно ожидать, что в окрестности ударных фронтов, где среда сильно возмущена, также реализуются благоприятные возможности для статистического ускорения заряженных частиц [84, 105, 108]. Возможна ситуация, когда источником плазменной турбулентности, наиболее эффективно рассеивающей быстрые частицы, служат сами ускоренные частицы, распределение которых вблизи ударного фронта неоднородно, что приводит к развитию неустойчивости [46, 47]. Наиболее эффективно генерируются альфвеновские волны и коэффициент диффузии по импульсу определяется выражением [101]

$$D = \frac{c_a^2}{9\kappa_{\parallel}} p^2, \quad (2.87)$$

где κ_{\parallel} — продольный по отношению к магнитному полю коэффициент пространственной диффузии частиц.

В связи со сказанным интересно рассмотреть задачу о формировании спектра ускоренных частиц в условиях совместного действия регулярного и статистического процессов ускорения. Для этого достаточно исследовать решение стационарного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(u f - \kappa \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(D p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \frac{\Delta u}{3p^2} \delta(x) \frac{\partial}{\partial p} (p^3 f) - \\ - \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \delta(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

описывающего ускорение частиц идеальной ударной волной.

Как показал пример исследования влияния энергетических потерь, решение этого уравнения даже в простейших случаях — трудная задача. Главная трудность состоит в определении спектра вблизи импульса инжекции $p \ll p_0$. Вместе с тем основной интерес

представляет исследование высокоэнергичной части спектра $p \gg p_0$, что можно сравнительно просто выполнить, не прибегая к процедуре получения точного решения.

Для простоты ограничимся случаем не зависящего от импульса пространственного коэффициента диффузии. Коэффициент диффузии по импульсу при этом будет иметь вид

$$D(p) = D_0(p/p_0)^2, \quad (2.89)$$

где $D_0 = D(p_0)$.

Нетрудно заметить, что уравнение (2.88) допускает решение в форме $f = \Psi(x)p^{-q}$. Подстановка этого соотношения в уравнение (2.88) приводит к уравнению для функции Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u \Psi - \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + D_0 q (3 - q) \Psi = 0,$$

решение которого по обе стороны фронта имеет вид

$$\Psi_i = B \exp \left[\frac{|x| u_i}{\kappa_i} (i - 2 - A_i) \right], \quad i = 1, 2, \quad (2.90)$$

где

$$A_i = (\sqrt{1 + 4q(3 - q)\alpha_i} - 1)/2, \quad \alpha_i = D_0 \kappa_i / u_i^2.$$

Повторяя описанную процедуру сшивки решений на ударном фронте, приходим к алгебраическому уравнению для показателя спектра q :

$$u_2 + (u_1 A_1 + u_2 A_2)/2 + \Delta u (3 - q)/3 = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что значение показателя спектра q , являющегося решением этого уравнения, плавно меняется в пределах от

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left[1 - 9 \frac{\sigma + 1}{2(\sigma - 1)^2} \alpha \right] + O(\alpha^2) \quad \text{при } \alpha \ll 1 \quad (2.91)$$

до

$$q = 3 \left[1 + \frac{2}{9\alpha} \frac{3 + \sigma}{(\sigma + 1)^2} \right] + O(\alpha^{-2}) \quad \text{при } \alpha \gg 1, \quad (2.92)$$

если ограничиться рассмотрением наиболее простого соотношения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Как и для процессов потерь энергии, роль статистического ускорения определяется соотношением его характерного времени τ_* и времени регулярного ускорения τ_a , поскольку $\alpha \simeq \tau_a/\tau_*$ (см. выражения (2.45) и (2.86)). Если темп регулярного ускорения много выше темпа статистического ускорения ($\tau_a \ll \tau_*$, $\alpha \ll 1$), то пространственное распределение и спектр ускоренных частиц, как видно из выражений (2.90) и (2.91), в основном определяются их регулярным ускорением. Только на больших расстояниях за ударным фронтом ($x \gg \kappa_2/u_2\alpha_2$) существенно сказывается статистическое ускорение — оно приводит согласно (2.90) к росту амплитуды спектра ускоренных частиц.

Противоположный предельный случай ($\alpha \gg 1$) соответствует преобладанию статистического ускорения, чем и определяется форма спектра (см. (2.92)) ускоренных частиц.

Для альфвеновской турбулентности, когда коэффициент диффузии по импульсу определяется выражением (2.87), $\alpha_{1,2} \sim (c_s/u_{1,2})^2$; отсюда вытекает вывод о значительном преобладании регулярного ускорения над статистическим в окрестности фронтов быстрых магнитогидродинамических ударных волн, для которых $u_{1,2} \gg c_s$.

Таким образом, решение задачи о влиянии конкурирующих процессов часто сводится к определению диапазона импульсов, где выполняется условие $\tau_a \ll \tau_i$ преобладания регулярного ускорения, причем границы этого диапазона достаточно надежно можно оценить из решения уравнений $\tau_a(p) = \tau_i(p)$.

Глава 3

УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Результаты исследования процесса регулярного ускорения плоской ударной волной имеют ограниченную область применения. В реальных условиях ударные волны не являются плоскими, они имеют сложные пространственно-временные характеристики. Хотя можно ожидать, что основные закономерности регулярного ускорения, установленные для плоских волн, сохраняют свою силу и в трехмерном случае, представляет интерес последовательное изучение влияния конечности размеров, кривизны ударного фронта и реального закона его движения на процесс ускорения. Кроме этого, имеется еще одно существенное обстоятельство, принципиально отличающее реальную волну от плоской. Дело в том, что космические ударные волны главным образом образуются в результате либо взрывоподобных процессов на звездах (вспышки сверхновых, солнечные вспышки и т. д.), либо торможения сверхзвуковых потоков истекающей с поверхности звезд плазмы (звездные ветры). Поэтому область перед или за ударным фронтом представляет собой сходящиеся потоки плазмы. Расширение плазмы ($\nabla u > 0$) будет приводить к адиабатическому замедлению частиц в соответствии с законом (2.4), что также может оказывать существенное влияние на пространственное распределение и спектр ускоренных частиц.

§ 10. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

При переходе к трехмерным уравнениям вычислительные трудности значительно возрастают. В то же время многие особенности трехмерной задачи регулярного ускорения можно понять, ограничиваясь рассмотрением сферически-симметричных ударных волн.

В сферически-симметричной модели, когда все величины (коэффициент диффузии κ , скорость среды u , источник частиц Q и, следовательно, сама функция распределения быстрых частиц) зависят от одной пространственной координаты — радиального расстояния r , уравнение переноса (2.3) и граничные условия на ударном фронте (2.20) примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right) - u \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} + Q, \quad (3.1)$$

$$f_1 = f_2, \quad (3.2)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{u_1}{3} p \frac{\partial f_1}{\partial p} = \kappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{u_2}{3} p \frac{\partial f_2}{\partial p} + \text{sign} [u(R-0) - u(R+0)] Q_0, \quad (3.3)$$

где $Q_0 \delta(r-R)$ — часть источника частиц Q , сосредоточенная на ударном фронте, который занимает положение $r = R(t)$. Индексы 1 и 2 по-прежнему указывают на принадлежность к области перед и за ударным фронтом соответственно, а значения функции $f_{1,2}$ и ее производные $\partial f_{1,2}/\partial r$, входящие в граничные условия (3.2) и (3.3), берутся при $r = R$. Функция sign в соотношении (3.3) отражает тот факт, что могут реализоваться две разные ситуации, когда область 1 перед ударным фронтом соответствует расстояниям $r < R$ (ударная волна при аккреции вещества) либо $r > R$ (ударная волна в звездном ветре).

В каждый момент времени ударная волна занимает ограниченную область пространства, так что на большом удалении от ударного фронта среда покоится — $u \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, при увеличении расстояния r функция распределения ускоренных частиц $f(r, p)$ должна приближаться к функции $f_\infty(p)$, характеризующей быстрые частицы, имеющиеся в невозмущенной среде

$$f(\infty, p) = f_\infty(p). \quad (3.4)$$

Если источник частиц Q в уравнениях (3.1) — (3.3) положить равным нулю, то они совместно с условием (3.4) также будут описывать ускорение быстрых частиц, первоначально находящихся в плазме, по которой распространяется ударная волна.

Другие возможности инжекции частиц в режим ускорения определяются заданием источника Q . При этом, как уже отмечалось, наиболее важной является инжекция некоторой части наиболее быстрых частиц тепловой плазмы после ее разогрева на ударном фронте. Этому подходу, рассмотрением которого мы ограничимся, отвечает сосредоточенный на ударном фронте источник $Q = Q_0 \delta(r-R)$.

Как и прежде, обсудим инжекцию моноэнергетических частиц:

$$f_\infty(p) = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0), \quad (3.5)$$

$$Q_0(r) = u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0). \quad (3.6)$$

Сверхзвуковые потоки плазмы, истекающие с поверхности некоторых типов звезд (звездные ветры) при взаимодействии с окружающей средой, могут претерпевать ударный переход [8, 9]. Типичный пример таких звезд — Солнце. Торможение солнечного ветра приводит к образованию стоячей ударной волны на границе гелиосферы [8, 9]. Поэтому представляет интерес исследовать ускорение заряженных частиц такими волнами. В частности, ускорение вблизи ударной волны, ограничивающей гелиосферу, может служить модулирующим механизмом для галактических космических лучей, проникающих внутрь гелиосферы из межзвездной среды.

11.1. Решение стационарного уравнения переноса. В системе отсчета, в которой звезда — источник ветра — находится в начале координат, зависимость скорости плазмы u от расстояния до звезды r может быть принята в виде [8, 9]:

$$u = \begin{cases} u_1, & r < R, \\ u_2 (R/r)^2, & r > R, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $u_2 = u_1/\sigma$.

Стационарное решение уравнения (3.1) можно получить аналитически [109—111], задавшись коэффициентом диффузии κ в форме

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 (r/R), & r < R, \\ \kappa_2 (r/R), & r > R, \end{cases} \quad (3.8)$$

где κ_1, κ_2 — константы. Для этого удобно перейти к преобразованию Фурье

$$\bar{f}(r, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(r, p) e^{iv \ln p} d \ln p$$

функции распределения $f(r, p)$, осуществив преобразование Фурье уравнения (3.1), что в стационарном случае дает:

для области $r < R$

$$\frac{d^2 \bar{f}_1}{dr^2} + \frac{(3 - g_1)}{r} \frac{d \bar{f}_1}{dr} - i \frac{2vg_1}{3} \bar{f}_1 = 0 \quad (3.9)$$

и для $r > R$

$$\frac{d}{dr} \left(R^2 g_2 \bar{f}_2 - r^3 \frac{d \bar{f}_2}{dr} \right) = 0, \quad (3.10)$$

где $g_i = u_i R / \kappa_i$.

Фурье-преобразование граничных условий (3.2) — (3.5) приводит к соотношениям

$$\bar{f}_2(R, v) = \bar{f}_1(R, v), \quad (3.11)$$

$$-i \frac{vu_1}{3} \bar{f}_1 + \kappa_1 \frac{d \bar{f}_1}{dr} = -i \frac{vu_2}{3} \bar{f}_2 + \kappa_2 \frac{d \bar{f}_2}{dr} + \bar{Q}, \quad (3.12)$$

$$\bar{f}_2(\infty, v) = \frac{N_\infty}{\sqrt{32\pi^3 p_0^3}} \exp(iv \ln p_0). \quad (3.13)$$

Общее решение уравнений (3.9) и (3.10) имеет вид

$$\bar{f}_1(r, v) = A(v) (r/R)^{K_1} + B(v) (r/R)^{K_2}, \quad (3.14)$$

$$\bar{f}_2(r, v) = C(v) + D(v) [1 - \exp(-g_2 R^2/2r^2)], \quad (3.15)$$

где

$$K_j = -(-1)^j \sqrt{\xi^2 + i2g_1 v/3} - \xi, \quad \xi = 1 - g_1/2. \quad (3.16)$$

Если выбрать для многозначной функции $K_j(v)$ комплексной переменной v ветвь $\arg(K_1 + \xi) < \pi/2$, $\operatorname{Re}(K_1 + \xi) > 0$, для которой $\operatorname{Re} K_1 \geq 0$, $\operatorname{Re} K_2 \leq 0$, то из требования ограниченности функции $f(r, p)$ вытекает $B(v) = 0$. Граничные условия (3.11) — (3.13) дают

$$C(v) = \bar{f}_2(\infty, v), \quad (3.17)$$

$$A(v) = [\bar{Q}_0(v) + \bar{f}_2(\infty, v) \kappa_2 g_2 \beta / (1 - \beta) R] \times \\ \times [\kappa_1 K_1 / R + \kappa_2 g_2 \beta / (1 - \beta) R - iv \Delta u / 3]^{-1}, \quad (3.18)$$

$$D(v) = (A - C) / (1 - \beta), \quad (3.19)$$

где $\beta = \exp(-g_2/2)$.

Выполняя обратное преобразование Фурье функций (3.14) и (3.15) с учетом (3.17) — (3.19) методом контурного интегрирования, можно получить

$$f_1(r, p) = \frac{3[N_0 + N_\infty \beta / \sigma(1 - \beta)]}{8\pi p_0^3 \sqrt{\lambda}} \left\{ \left[Y_1 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q_1} \left(\frac{r}{R} \right)^{n_1} \times \right. \right. \\ \times \operatorname{erfc} \left(Y_1 \sqrt{\frac{3}{2g_1} \ln \frac{p_0}{p}} - \frac{\ln R/r}{2 \sqrt{\frac{3}{2g_1} \ln \frac{p_0}{p}}} \right) + Y_2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q_2} \times \\ \times \left(\frac{r}{R} \right)^{n_2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln R/r}{2 \sqrt{\frac{3}{2g_1} \ln \frac{p_0}{p}}} - Y_2 \sqrt{\frac{3}{2g_1} \ln \frac{p_0}{p}} \right) \Big] \theta(p_0 - p) + \\ \left. + 2Y_1 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q_1} \left(\frac{r}{R} \right)^{n_1} \theta(p - p_0), \right. \quad (3.20)$$

$$f_2(r, p) = f_1(R, p) \frac{1 - \exp\left(-\frac{g_2 R^2}{2r^2}\right)}{1 - \exp(-g_2/2)} + \\ + \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \frac{\exp\left(-\frac{g_2 R^2}{2r^2}\right) - \exp\left(-\frac{g_2}{2}\right)}{1 - \exp(-g_2/2)}, \quad (3.21)$$

где

$$q_{1,2} = \frac{3}{2g_1} (Y_{1,2}^2 - \xi^2), \quad n_{1,2} = Y_{1,2} - \xi,$$

$$Y_{1,2} = \frac{\sigma}{\sigma-1} (1 \pm \sqrt{\lambda}), \quad \lambda = \left(1 - \frac{\sigma-1}{\sigma} \xi\right)^2 + \frac{2g_1(\sigma-1)}{\sigma^2} \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что спектр частиц в области $r > R$ за ударным фронтом согласно (3.21) представляет собой сумму двух компонент. Первая — частицы, уже побывавшие в области $r < R$ и в силу этого испытывавшие воздействие не только регулярного ускорения, но и адиабатического замедления. В их распределении, описываемом функцией $f_1(R, p)$, как видно из выражения (3.20), имеются как замедленные частицы с импульсами $p < p_0$, так и ускоренные с $p > p_0$. Вторую компоненту в распределении (3.21) представляет та часть моноэнергичных поступающих из невозмущенной среды ($r \gg R$) частиц, которые ни разу не пересекли ударного фронта. Процесс распространения частиц в области $r > R$ не сопровождается изменением их энергии согласно (2.4), поскольку в этой области $\nabla u = 0$.

11.2. Соотношение различных механизмов инжекции. Инжекция быстрых частиц невозмущенной среды в режим ускорения, как видно из выражения (3.20), модулируется величиной $a = \sigma^{-1}\beta/(1-\beta) < 1$. При $g_2 \gg 1$ она очень мала ($a \ll 1$) и инжекция сильно подавлена вследствие конвективного выноса частиц, который затрудняет их проникновение с больших расстояний в область ударного фронта. Это особенно наглядно видно, если вычислить концентрацию частиц

$$N(r) = 4\pi \int_0^\infty f(r, p) p^2 dp \quad (3.22)$$

в области $r > R$, используя выражения (3.21) и (3.20). Когда инжекция на ударном фронте отсутствует ($N_0 = 0$), концентрация частиц [109] $N(r) = N_\infty \exp\left(-\frac{g_2}{2} \frac{R^2}{r^2}\right)$ спадает по мере уменьшения

расстояния r , причем при $g_2 \gg 1$ лишь незначительная доля частиц $N(R) \ll N_\infty$ достигает ударного фронта. Поскольку, как мы увидим в дальнейшем, процесс ускорения осуществляется особенно эффективно именно при условии $g_2 \gg 1$, можно ожидать, что в реальной ситуации основную роль должна играть инжекция в режим ускорения надтепловых частиц на ударном фронте.

11.3. Поток ускоренных частиц и выносимой ими энергии во внешнее пространство. Каков бы ни был механизм инжекции, частицы, ускоренные в окрестности ударной волны, поступают во внешнее пространство. Поток частиц с определенным импульсом, уносимый во внешнее пространство $I(p) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 j_r(p)$, выражается через плотность направленного потока частиц

$$j_r = \int f(r, p) v_r p^2 d\Omega = \frac{4\pi v p^2}{3} f_r. \quad (3.23)$$

Используя выражение (2.3), что для радиальной компоненты первого момента функции распределения дает

$$f_r = -\frac{3\kappa}{v} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{u}{v} p \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (3.24)$$

а также выражение (3.21) для распределения быстрых частиц в области $r > R$, для импульсов $p \neq p_0$ приходим к соотношению:

$I(p) = 4\pi R^2 \frac{u_1 n_1(R, p)}{(1-\beta)}$, откуда видно, что все частицы независимо от величины импульса поступают во внешнее пространство. Иначе говоря, спектр $f_1(R, p)$, сформированный на ударном фронте, выносится из системы без искажений. Важно при этом отметить, что этот результат остается в силе для коэффициента диффузии частиц $\kappa_2(p)$ с произвольной зависимостью от импульса, поскольку выражение (3.21) для пространственного распределения частиц во внешней области справедливо в общем случае произвольных $\kappa_2(p)$.

Полный поток частиц с импульсами $p \neq p_0$ определяется мощностью механизмов инжекции:

$$I = 4\pi R^2 u_1 N_0 + 4\pi R^2 \beta u_2 N_\infty.$$

Это выражение также показывает, что инжекция быстрых частиц, имеющих в невозмущенной среде, в режим ускорения неэффективна с точки зрения генерации частиц высоких энергий. Условие $g_1 \gg 1$, необходимое для осуществления эффективного ускорения, означает $\beta \ll 1$, что приводит к подавлению этого механизма инжекции.

В рассматриваемой системе помимо области ударного фронта, где $\nabla u < 0$ и согласно (2.4) частицы набирают энергию, имеется область $r < R$, где они замедляются ($\nabla u > 0$). В целом ускорение преобладает над замедлением. Чтобы доказать этот важный факт, достаточно вычислить направленный поток энергии

$$F_\alpha = \frac{4\pi}{3} \int dp p^2 \epsilon v f_\alpha(r, p), \quad (3.25)$$

что позволит определить количество энергии \mathcal{F} , уносимой частицами из системы за единицу времени: $\mathcal{F} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 F_r$. Используя выражение (3.24) для радиальной компоненты первого момента и выражения (3.20) и (3.21) для функции распределения, приходим к соотношению

$$\mathcal{F} = 4\pi u_1 R^2 \{ [E(R) - \beta E(\infty)] / (1 - \beta) + P(\infty) \}, \quad (3.26)$$

где

$$E(r) = 4\pi \int f(r, p) \epsilon p^3 dp \quad (3.27)$$

и

$$P(r) = \frac{4\pi}{3} \int f(r, p) v p^3 dp \quad (3.28)$$

— плотность энергии и давление частиц. Из выражения (3.26) видно, что при $E(R) > \beta E(\infty)$ энергия в среднем выносится из системы ($\mathcal{F} > 0$).

В отсутствие инжекции на ударном фронте ($N_0 = 0$) приобретение энергии частицами целиком обуславливается преобладанием ускорения частиц над их замедлением, поэтому достаточно проанализировать случай $N_0 = 0$.

Для упрощения процедуры вычисления плотности энергии частиц на ударном фронте $E(R)$ можно ограничиться случаем, когда величина $\gamma_c = 1 + pv/(3\epsilon)$ постоянна во всей области импульсов, что выполняется для нерелятивистских ($v/c \ll 1$, $\gamma_c = 5/3$) или для ультрарелятивистских ($1 - v^2/c^2 \ll 1$, $\gamma_c = 4/3$) частиц. При этом параметр γ_c представляет собой показатель адиабаты быстрых частиц.

Выполняя интегрирование в выражении (3.27) с функцией распределения $f_1(R, p)$, описываемой выражением (3.20), можно получить [109]

$$E(R) = \frac{\beta E(\infty)}{\beta [(\gamma_c - \gamma_*) \sigma - (\gamma_c - 1)] + [\gamma_c - \sigma(\gamma_c - \gamma_*)]}, \quad (3.29)$$

где $\gamma_* = [V(1 - g_1/2)^2 + 2\gamma_c g_1 + g_1/2 - 1]/g_1$, при условии, что степень сжатия не очень велика:

$$\sigma \leq \frac{\gamma_c - \beta(\gamma_c - 1)}{(\gamma_c - \gamma_*)(1 - \beta)}.$$

В противном случае интеграл (3.27) для $E(R)$ расходится, что обусловлено жестким характером спектра ускоренных частиц. Физически расходимость энергии означает нарушение принятого здесь линейного приближения.

Параметр γ_* меняется от значения $\gamma_* = 1$ при $g_1 \gg 1$ до $\gamma_* = \gamma_c$ при $g_1 \ll 1$. Нетрудно видеть, что всем допустимым значениям параметров β и γ_* , входящих в выражение (3.29), отвечает неравенство

$$E(R) \geq \beta E(\infty),$$

что и доказывает преобладание в системе ускорения частиц над их замедлением.

Заметим также, что даже в предельном случае $g_{1,2} \ll 1$, когда $E(R) = \beta E(\infty)$ и регулярное ускорение отсутствует, частицы уносят энергию из системы, поскольку $\mathcal{F} > 0$ благодаря члену $P(\infty)$ в выражении (3.26). Этот эффект не связан с ударной волной, так как не зависит от степени сжатия $\sigma = u_1/u_2$, а при $\sigma = 1$ ударная волна отсутствует. Кроме того, при $\beta \ll 1$ лишь ничтожная часть частиц способна достичь ударного фронта.

Суть этого эффекта, разъяснение которому было дано в работе [73], состоит в следующем. Распространение частиц в рассеивающей среде представляет собой последовательность чередующихся встречных ($pu < 0$) и догоняющих ($pu > 0$) рассеяний. Встречные рассеяния сопровождаются увеличением импульса частицы в среднем на величину $\Delta p = \frac{4}{3} pu/v$ (см. формулу (1.12)), при догоняющих рассеяниях импульс уменьшается на величину $\frac{4}{3} pu/v$. Усреднен-

ный за промежуток времени Δt , много больший среднего времени между рассеяниями τ , импульс частицы p меняется в соответствии с уравнением (2.4). Реальная функция $p(t)$ является квазисциллирующей с характерным периодом $T=2\tau$. Поэтому усредненный по частицам единичного объема темп изменения импульса $\langle dp/dt \rangle_r$ (в отличие от величины $\langle dp/dt \rangle$, где усреднение ведется для фиксированной группы частиц по времени $\Delta t \gg \tau$) не равен нулю даже в случае, когда $\nabla u = 0$. Так, если в некоторой точке r направления скорости среды u и градиента концентрации частиц ∇n совпадают, величина $\langle dp/dt \rangle_r$ положительна, поскольку частиц, испытывающих в данной точке пространства в единицу времени встречные рассеяния, больше, чем тех, что испытывают догоняющие рассеяния, именно из-за условия $u \nabla n > 0$. Такого рода ситуация реализуется в области $r > R$ для той части частиц в распределении (3.21), которые не испытали пересечений ударного фронта. Эти частицы дают всегда положительный вклад в поток энергии $F_r = uP(\infty)$, вследствие чего всегда $\mathcal{F} > 0$.

11.4. Особенности формы спектра. Адиабатическое замедление в области $r < R$ и конечность размеров ударной волны, приводящая к дополнительному уходу частиц из окрестности ударного фронта, снижают эффективность ускорения; при этом укрупняется спектр ускоренных частиц. Роль указанных двух факторов зависит от значений параметров g_1 и g_2 соответственно. Как видно из выражений (3.20) и (3.21), параметры g_1 и g_2 определяют проникающую способность частиц в направлении против потока плазмы и от места их инжекции. Другими словами, параметры g_1 и g_2 в первую очередь характеризуют степень воздействия (модуляции) потоков плазмы на пространственное распределение частиц, в силу чего их принято называть параметрами модуляции.

При любых значениях параметров модуляции спектр ускоренных частиц более крутой, чем в плосковолновом случае. Причем, если $g_1 \rightarrow 0$ либо $g_2 \rightarrow 0$, показатель спектра ускоренных частиц q неограниченно растет:

$$q = \frac{3}{2g_1} \frac{(\sigma^2 + 1)(\sigma^2 + 2\sigma - 1)}{\sigma(\sigma - 1)} \quad \text{при} \quad g_1 \ll \min(1, g_2),$$

$$q = \frac{6}{(\sigma - 1)g_2} \quad \text{при} \quad g_2 \ll \min(1, g_1).$$

Это означает, что генерация высокоэнергичных частиц (или попросту сам процесс ускорения) становится малоэффективной.

С увеличением параметра g_1 роль замедления уменьшается. Это видно из выражения (3.20): при $g_1 \rightarrow \infty$ амплитуда спектра в области импульсов $p < p_0 f \sim (p/p_0)^{3g_1/8}$ стремится к нулю. Это связано с тем, что при $g_1 \gg 1$ длина диффузионного проникновения частиц в область $r < R$ невелика:

$$L = \kappa_1/u_1 \ll R \quad \text{при} \quad g_1 \gg 1.$$

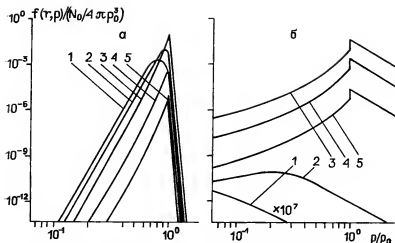


Рис. 3.1. Спектр частиц на различных расстояниях от фронта стоячей сферической ударной волны в случае (а) слабой ($g_1 = g_2 = 0,1$) и (б) сильной ($g_1 = g_2 = 10$) модуляции:

$r/R = 0,01$ (1), 0,1 (2), 1 (3), 10 (4), 100 (5).

Темп адиабатического замедления здесь согласно соотношению (2.4) $\tau_{ad}^{-1} = \nabla \mathbf{u} / 3 \simeq 2u_1 / R$. Чтобы сравнить его с темпом ускорения, нужно учесть, что только часть

$$\tau_{a1} = \frac{3\kappa_1}{(u_1 - u_2)u_1}$$

времени ускорения τ_a (см. (2.45)) частицы проводят в области 1. Учет фактора τ_{a1} / τ_a дает

$$\tau_{ad}^{-1} \simeq \frac{6\kappa_1}{(\sigma - 1)Ru_1} \tau_a^{-1},$$

что значительно меньше темпа ускорения τ_a^{-1} при $\kappa_1 \ll Ru_1$ ($g_1 \gg 1$).

При $g_1 \gg 1$ отличие показателя спектра ускоренных частиц от плосковолнового случая $3\sigma / (\sigma - 1)$ обусловлено только конечностью размеров ударной волны:

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left[\frac{1 + (\sigma - 2)\beta}{1 - \beta} \right] \quad \text{при } g_1 \gg 1.$$

Как видно, этот эффект качественно правильно описывается в рамках одномерной задачи с поглощающей границей (см. (2.35)).

При больших значениях обоих параметров g_1, g_2 показатель спектра ускоренных частиц q близок к плосковолновому значению $3\sigma / (\sigma - 1)$.

Зависимость формы спектра частиц и их пространственного распределения от величины параметра модуляции показана на рис. 3.1, на котором наглядно демонстрируется уменьшение доли

замедленных частиц ($p < p_0$) при увеличении параметров модуляции и приближении формы спектра ускоренных частиц ($p > p_0$) к плосковолновому пределу $f \sim (p/p_0)^{-3\sigma/(\sigma-1)}$.

Аналогичная задача, допускающая аналитическое решение, была исследована в работе [112], где рассмотрен профиль течения плазмы $u(r < R) = u_1$, $u(r > R) = 0$, представляющего собой сферическую ударную волну с бесконечной степенью сжатия. Хотя реализация такого течения маловероятна, основные закономерности процесса ускорения частиц в этой системе те же, что и в описанном выше случае.

Следует отметить, что, хотя прикладное значение точных аналитических решений ограничено в силу специфического выбора коэффициентов диффузии, они наглядно показывают основные особенности процесса регулярного ускорения частиц ударной волной конечных размеров.

§ 12. СТОЯЧАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В АККРЕЦИРУЮЩЕМ ВЕЩЕСТВЕ

В последнее время открыт целый ряд мощных астрофизических объектов (см., например, [5]), светимость которых связана с аккрецией вещества на расположенные в их центре массивные тела. Примерами такого рода могут служить квазары, двойные рентгеновские источники и т. д. Аккреция сопровождается выделением гравитационной энергии в форме кинетической энергии аккрецирующего вещества. Об астрофизических масштабах этой энергии говорит, в частности, тот факт, что энергия, выделяемая при аккреции на нейтронные звезды в Галактике, может быть сравнима с энергией, выделяемой при взрывах сверхновых звезд [113].

Поскольку процесс аккреции сопровождается образованием сильной квазистационарной ударной волны, значительный интерес, прежде всего в рамках проблемы происхождения галактических космических лучей, представляет исследование возможности ускорения высокоэнергичных заряженных частиц в подобных объектах.

12.1. Спектр ускоренных частиц. Структура течения аккрецирующего вещества в приближении сферической симметрии характеризуется тем, что направленная к центру скорость $u(r)$ меняется от нуля на больших расстояниях от притягивающего центра до некоторого значения u_1 на расстоянии $r = R$, где осуществляется ударный переход. Можно ожидать, что главные особенности процесса ускорения частиц будут слабо зависеть от выбора конкретной зависимости скорости вещества от расстояния, поскольку ускорение, когда оно эффективно, протекает в узкой окрестности ударного фронта. Поэтому целесообразно остановить выбор на поле скоростей $u(r)$, позволяющем предельно упростить описание процесса ускорения и наглядно продемонстрировать главные его особенности.

Рассмотрим стационарную ударную волну, в которой скорость вещества описывается следующими соотношениями:

$$u(r) = \begin{cases} -u_2 & \text{при } r < R, \\ -u_1(R/r)^2 & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (3.30)$$

где $u_1 = \sigma u_2 > 0$, σ — степень сжатия вещества на ударном фронте.

Выбор зависимости $u \sim r^{-2}$ во внешней области $r > R$, поскольку в этом случае $\nabla u = 0$, позволяет без труда получить решение стационарного уравнения переноса (3.1), удовлетворяющее краевым условиям (3.4) и (3.5), при произвольном коэффициенте диффузии

$$f_1(r, p) = f_R(p) \left[\exp \left(\int_r^\infty \frac{u_1 R^2}{\kappa_1 r^2} dr \right) - 1 \right] / (\beta - 1) + \\ + \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \left[\beta - \exp \left(\int_r^\infty \frac{u_1 R^2}{\kappa_1 r^2} dr \right) \right] / (\beta - 1), \quad (3.31)$$

где

$$f_R(p) = f_{1,2}(R, p), \quad \beta = \exp \left(\int_R^\infty \frac{u_1 R^2}{\kappa_1 r^2} dr \right).$$

Во внутренней области $r < R$ за ударным фронтом особенно просто получить решение уравнения переноса, если использовать допущение о малости коэффициента диффузии частиц, что в реальных условиях обеспечивается высоким уровнем возмущенности среды в указанной области. Для этого достаточно учесть то, что диффузионный член в уравнении переноса (3.1) имеет порядок величины $\kappa f/R^2$, где R — характерный масштаб изменения функции распределения. Следующий, конвективный член в правой части уравнения (3.1) порядка $u f/R$. Отсюда следует, что диффузией частиц по сравнению с их конвекцией можно пренебречь, если $\kappa \ll uR$. Для внутренней задачи это условие означает

$$\kappa_2 \ll u_2 R \quad \text{или} \quad g_2 \gg 1. \quad (3.32)$$

Условие (3.32), которое в области $r < R$ будем считать всегда выполненным, позволяет, пренебрегая диффузионным членом в уравнении переноса (3.1), записать его в рассматриваемом стационарном случае как

$$u \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{\nabla u}{3} p \frac{\partial f_2}{\partial p} = 0.$$

Решение этого уравнения с краевым условием $f_2(R, p) = f_R(p)$ имеет простой вид

$$f_2(r, p) = f_R(ap), \quad (3.33)$$

где фактор

$$a = \exp \left(\frac{1}{3} \int_r^R \frac{\nabla u}{u} dr \right) \quad (3.34)$$

отражает адиабатическое увеличение импульса частиц в претерпевающей сжатие среде ($\nabla u < 0$).

Спектр частиц на ударном фронте $f_R(p)$ должен быть найден из краевого условия (3.3), которое для моноэнергетического источника частиц (3.6) с учетом соотношений (3.31) и (3.33) приводит к выражению

$$\frac{u_1 \beta}{1 - \beta} f_R + \frac{\Delta u}{3} p \frac{\partial f_R}{\partial p} \left(1 + \frac{2}{g_2} \right) = u_1 \frac{N_0 + N_\infty \beta / (\beta - 1)}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0).$$

Это уравнение легко интегрируется, что дает

$$f_R(p) = \frac{N_0 + N_\infty \beta_0 / (\beta_0 - 1)}{4\pi p_0^3} \exp \left[\frac{3u_1}{\Delta u} \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} \frac{\beta}{(\beta - 1)(1 + 2/g_2)} \right] \theta(p - p_0), \quad (3.35)$$

где $\beta_0 = \beta(p_0)$. Нетрудно убедиться в том, что решение (3.35) остается справедливым для произвольного поля скоростей $u(r)$ во внутренней области $r < R$.

Для области импульсов, где наряду с g_2 велик параметр модуляции во внешней области $g_1 \gg 1$, спектр ускоренных частиц на ударном фронте близок по форме к универсальному $f_R \sim p^{-3\alpha/(\alpha-1)}$. В той области, где $\beta - 1 \ll 1$, т. е. $g_1 \ll 1$, спектр очень крутой, что говорит о неэффективности ускорения. Предполагая, как обычно, что коэффициент диффузии частиц — растущая функция импульса, заключаем, что спектр ускоренных частиц имеет универсальный вид в области импульсов $p_0 \leq p \leq p_m$, где максимальный импульс определяется из соотношения $\beta(p_m) = 1$.

Характерной особенностью данного процесса является то, что в отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе быстрые частицы невозможной среды эффективно вступают в процесс ускорения. Фактор $\beta_0/(\beta_0 - 1)$, стоящий в выражении (3.35) перед плотностью этих частиц N_∞ , близок к единице, поскольку эффективное ускорение означает $\beta_0 \gg 1$.

12.2. Поток частиц, выходящих во внешнее пространство. Роль аккрецирующих объектов как источника частиц высоких энергий определяется не столько спектром ускоренных частиц в области ударного фронта, сколько спектром выходящих во внешнее пространство частиц. Для его нахождения достаточно вычислить поток выходящих из системы ускоренных частиц

$$I(p) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 j_r(p).$$

Пользуясь выражениями (3.23), (3.24), а также (3.31), получаем

$$I(p) = 4\pi R^2 u_1 n_R(p) / (\beta - 1). \quad (3.36)$$

Отсюда следует важная и интересная особенность. Из всего сформированного на ударном фронте спектра ускоренных частиц наружу выходит лишь их небольшая часть — только частицы с импуль-

сами p вблизи максимального импульса p_m в спектре $f_R(p)$, где величина $(\beta - 1)^{-1}$ в выражении (3.36) не слишком мала. Если коэффициент диффузии достаточно быстро меняется с изменением импульса, можно считать, что во внешнее пространство поступает моноэнергетический спектр частиц, импульс которых $p \approx p_m$. Если в течение времени жизни параметры системы меняются плавно, то может быть сформирован степенной спектр выходящих из системы частиц.

§ 13. БЕГУЩАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

Исследование процесса ускорения частиц на фронте бегущей ударной волны представляет интерес прежде всего потому, что ударные волны, порождаемые взрывами сверхновых звезд, рассматриваются как вероятный источник галактических космических лучей [4—6].

Сферически-симметричная идеальная (т. е. с бесконечно тонким фронтом) ударная волна в покоящейся среде описывается заданием закона ее расширения $R(t)$ и поля скоростей среды

$$u(r, t) = \begin{cases} ru(r, t)/r, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (3.37)$$

При этом среда натекает на ударный фронт со скоростью $u_1 = dR/dt$ и оттекает позади него со скоростью $u_2 = u_1/\sigma$, где σ — степень сжатия вещества на ударном фронте.

Сложность задачи, вызванная ее существенной нестационарностью, не позволяет получить точное решение уравнения переноса (3.1) с полем скоростей типа (3.37). Однако основные особенности регулярного ускорения частиц бегущей ударной волной [52, 85, 114, 115] удастся исследовать на основе приближенных решений. Мы изложим здесь достаточно общий метод решения задачи ускорения частиц бегущей ударной волной [116, 117], пригодный для произвольного закона расширения ударной волны $R(t)$. Суть его состоит в том, что решения уравнения переноса (3.1) в области перед $f_1(r, p, t)$ и за $f_2(r, p, t)$ ударным фронтом выражаются через спектр частиц на ударном фронте $f_R(p, t) = f_{1,2}(R, p, t)$, который затем может быть найден из граничных условий (3.2), (3.3). При этом достаточно просто получить замкнутые выражения для $f_R(p, t)$ в предельных случаях малых $g_{1,2} \ll 1$ и больших $g_{1,2} \gg 1$ значений параметров модуляции.

13.1. Внутренняя задача. Решение уравнения переноса во внутренней области $r < R$ за ударным фронтом, как и в предыдущем случае, получить несложно, если принять условие (3.32) малости коэффициента диффузии. Пренебрежение диффузией частиц позволяет записать уравнение переноса (3.1) в виде

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\nabla u}{3} p \frac{\partial f_2}{\partial p} - u \frac{\partial f_2}{\partial r}. \quad (3.38)$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения с краевым условием $f_2(R, p, t) = f_R(p, t)$ представимо в виде

$$f_2(r, p, t) = f_R(ap, t_R), \quad (3.39)$$

где коэффициент

$$a = \exp \left[\int_{t_R}^t \frac{\nabla u(s, t')}{3} dt' \right] \quad (3.40)$$

отражает адиабатическое изменение импульса частиц, который меняется в соответствии с уравнением (2.4); $s(t)$ — решение уравнения

$$\frac{ds}{dt} = u(s, t) \quad (3.41)$$

с краевыми условиями

$$s(t_R) = R(t_R), \quad s(t) = r. \quad (3.42)$$

Заметим, что в отличие от общего случая пренебрежение диффузией быстрых частиц означает, что каждая из них вместе с элементами среды двигается по строго определенным траекториям, которые в явном виде задаются соотношениями (3.41) и (3.42).

13.2. Внешняя задача. Во внешней области $r > R$, которую будем считать однородной ($\kappa_1(r) = \text{const}$), где $u = 0$, решение уравнения переноса

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\kappa_1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) \quad (3.43)$$

с краевыми условиями

$$f_1(R, p, t) = f_R(p, t), \quad (3.44)$$

$$f_1(\infty, p, t) = 0, \quad (3.45)$$

используя стандартный метод тепловых потенциалов [118], можно представить в виде

$$f_1(r, p, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{r - R(t')}{[\kappa_1(t - t')]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[r - R(t')]^2}{4\kappa_1(t - t')} \right\} \mu(t') dt', \quad (3.46)$$

где функция $\mu(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{R(t) - R(t')}{[\kappa_1(t - t')]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[R(t) - R(t')]^2}{4\kappa_1(t - t')} \right\} \mu(t') dt' + \frac{\mu(t)}{2\kappa_1} = R(t) f_R(t). \quad (3.47)$$

Краевое условие (3.45) означает, что мы ограничиваемся рассмотрением инъекции частиц в режим ускорения на ударном фронте.

В общем случае переход от дифференциального уравнения (3.43) к интегральным уравнениям (3.46) и (3.47) не облегчает

решение задачи. Использование интегральных уравнений удобно тем, что они позволяют достаточно просто осуществить процедуру представления решения в виде ряда по $1/g_1$ или по g_1 при больших либо малых значениях параметра модуляции $g_1 = Ru_1/\kappa_1$ соответственно.

Рассмотрим вначале случай $g_1 \gg 1$. Нетрудно видеть, что это условие позволяет эффективно использовать метод перевала для выполнения интегрирования в уравнении (3.47), что позволяет представить его решение в виде

$$\mu(t) = \kappa R(t) f_R(t) [1 + (b+1)/g_1 + O(g_1^{-2})], \quad (3.48)$$

где $b = d \ln f_R / d \ln R$. Подставляя это выражение в соотношение (3.46) и выполняя аналогичным образом интегрирование, можно получить выражение для функции распределения частиц во внешней области

$$f_1(r, p, t) = f_R(p, t) \frac{R}{r} \exp \left\{ -g_1 \frac{r-R}{R} \left[1 + \frac{b+1-(v-1)/v}{g_1} \right] \right\} + O(g_1^{-2}), \quad (3.49)$$

в котором параметр $v = d \ln R / d \ln t$ определяет закон расширения ударной волны

$$R(t) = R_0 (t/t_0)^v, \quad (3.50)$$

где $R_0 = R(t_0)$.

Выражение (3.49) показывает, что пространственное распределение ускоренных частиц перед фронтом сферической ударной волны мало отличается от случая плоской волны, если параметр модуляции g_1 велик. Частицы занимают перед ударным фронтом узкую по сравнению с R область размером $L \sim R/g_1 = \kappa_1/u_1$. По мере уменьшения параметра g_1 толщина L растет, приближаясь к размеру ударной волны R , и начинает проявляться отличие от случая плоской волны; к тому же нужно иметь в виду, что точность выражения (3.49) при уменьшении g_1 ухудшается.

13.3. Сшивка решений на ударном фронте. Выражения (3.39) и (3.49) дают решение задачи о регулярном ускорении частиц сферической ударной волной. Входящая в них функция $f_R(p, t)$, представляющая собой в каждый момент времени спектр частиц на ударном фронте, может быть найдена из граничных условий на ударном фронте (3.2) и (3.3). Первое из этих условий выполнено автоматически, а второе превращается в уравнение для функции $f_R(p, t)$:

$$u_1 \left[1 + \frac{b+2-(v-1)/v}{g_1} + \frac{\sigma b}{g_2} \right] f_R - \frac{\Delta u}{3} \left[1 - \frac{d}{g_2(\sigma-1)} \right] p \frac{\partial f_R}{\partial p} = Q_0, \quad (3.51)$$

где $d = R \nabla u (r = R - 0) / u_2$.

Если, как прежде, ограничиться случаем моноэнергетического источника частиц

$$Q_0 = u_1 \frac{N_0(t)}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0),$$

решение уравнения (3.51) будет с точностью $\sim 1/g_1^2$ иметь вид

$$f_R(p, t) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} q \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0), \quad (3.52)$$

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma-1} \left[1 + \frac{\delta + 2 - (v-1)/v}{g_1} + \frac{\delta v + d/\Delta u}{g_2} \right], \quad (3.53)$$

где параметр $\delta = d \ln N_0 / d \ln R$ определяет закон изменения темпа инжекции во времени.

Выражения (3.52) и (3.53) показывают, что спектр ускоренных бегущей сферической ударной волной частиц, для которых параметры модуляции велики ($g_{1,2} \gg 1$), такой же, как и в плосковолновом случае. Для растущих с импульсом коэффициентов диффузии —

$$\kappa_{1,2}(p) = \kappa_{01,2}(p/p_0)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (3.54)$$

условию $g_{1,2} \gg 1$ отвечает область импульсов $p_0 \leq p \leq p_m(t)$, где величина $p_m(t)$ определяется из соотношения

$$g_1(p_m, t) = 1, \quad (3.55)$$

если принять для простоты, что больший уровень возмущенности среды за ударным фронтом обуславливает выполнение условия $g_2(p, t) \gg g_1(p, t)$. Из соотношений (3.54), (3.55) и (3.50) вытекает закон изменения величины p_m во времени:

$$p_m(t) = p_0 (v R_0^2 / \kappa_{01} t_0)^{1/\alpha} (t/t_0)^{(2v-1)/\alpha}. \quad (3.56)$$

Как видно из выражений (3.52) и (3.53), для не слишком быстро спадающего со временем темпа инжекции — $\delta > -2 + (v-1)/v$ — вблизи точки $p = p_m$ спектр ускоренных частиц существенно укручается: показатель спектра увеличивается с ростом импульса. Поэтому величина $p_m(t)$ имеет смысл максимального импульса частиц, ускоряемых в момент времени t .

Если ж темп инжекции быстро падает со временем, так что $\delta < -2 + (v-1)/v$, вблизи импульса $p_m(t)$ спектр становится более пологим — показатель спектра q уменьшается с ростом импульса. Объяснение этого эффекта состоит в следующем. Чтобы достичь к моменту времени t импульса $p > p_0$, частицы должны инжектироваться в режим ускорения в более ранний момент $t' = t - \Delta t$, где $\Delta t \approx t_a(p)$ (см. (2.43)). Поскольку количество инжектированных за время t_a частиц равно $N = 4\pi t_a Q_0(t) R^2$, а время ускорения t_a является растущей функцией импульса, спектр ускоренных частиц будет укрущаться, если $N(t)$ — падающая функция времени. Знак производной dN/dt определяется знаком величины $\delta + 2 - (v-1)/v$, откуда видно, что при $\delta > -2 + (v-1)/v$ спектр ускоренных частиц будет более крутым, а при $\delta < -2 + (v-1)/v$ — более пологим, чем в плосковолновом случае.

Таким образом, при достаточно быстром спадании темпа инжекции частиц в режим ускорения спектр ускоренных частиц в области

$p > p_m(t)$ уполаживается. Это одновременно говорит о том, что в спектре могут присутствовать в заметном количестве частицы с импульсами $p > p_m(t)$, которые были ускорены в предшествующие моменты времени $t' < t$, при условии $p_m(t') > p_m(t)$.

13.4. Автомоделный закон расширения. Особый интерес представляет случай расширения ударной волны по закону

$$R(t) = R_0 (t/t_0)^{2/5}, \quad (3.57)$$

поскольку, согласно современным представлениям, он отвечает важной в эволюции ударных волн от сверхновых адиабатической стадии [7]. Параметр t_0 в выражении (3.57) можно рассматривать как время начала адиабатической стадии, отсчитываемое с момента вспышки сверхновой; тогда R_0 будет представлять собой размер ударной волны в этот момент времени. Скорость среды, отвечающая адиабатической стадии расширения, можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать автомоделной функцией

$$u(r, t) = \begin{cases} u_1 \frac{\sigma - 1}{\sigma} \frac{r}{R} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (3.58)$$

Распределение ускоренных частиц с импульсами $p \leq p_m(t)$ перед ударным фронтом, как и во всех других случаях, описывается выражениями (3.49), (3.52), причем величина максимального импульса падает со временем по закону

$$p_m(t) = p_0 (2R_0^2/5\kappa_{01}t_0)^{1/\alpha} (t/t_0)^{-1/5\alpha}. \quad (3.59)$$

В области за ударным фронтом распределение частиц, которое можно получить, пользуясь выражениями (3.39) и (3.52), при произвольном числе Маха $M_1 = u_1/c$, с учетом зависимости степени сжатия от времени (1.9) выглядит весьма громоздко. В более простом случае больших чисел Маха $M_1 \gg 1$, когда степень сжатия σ можно считать постоянной, выражение (3.39) с учетом (3.52), (3.53), (3.57) и (3.58) для области импульсов $p_0 \leq p \leq p_m(r, t)$ дает

$$f_2(r, p, t) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} q \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-q} \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma(\alpha+\delta)} \theta \left[p - \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma-1} p_0 \right], \quad (3.60)$$

где

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma-1} \left[1 + \frac{\delta+9/2}{g_1} + \frac{2\delta/5 + 3\sigma^2/(\sigma-1)^2}{g_2} \right], \quad (3.61)$$

а величина $p_m(r, t) = p_m(t) (R/r)^{\sigma/2\alpha-\sigma+1}$ является максимальным импульсом спектра в точке r . При постоянном темпе инжекции ($\delta = 0$), как видно из выражения (3.60), плотность ускоренных частиц вследствие адиабатического замедления быстро убывает, как $(r/R)^{3\sigma}$. Такая ситуация может реализоваться тогда, когда инжектируемыми частицами являются галактические космические лучи с однородной плотностью N_0 в области перед ударным фронтом.

Если частицы инжектируются в режим ускорения из теплового распределения за ударным фронтом, то следует ожидать, что темп их инжекции будет спадать со временем ($\delta < 0$), поскольку согласно соотношениям Ренкина — Гюгонио (1.9) — (1.11) температура плазмы за фронтом $T_2 \sim M_1^2$ — падающая функция времени. Так, при $\delta = -3$, как показывает выражение (3.60), концентрация ускоренных частиц в возмущенной области не зависит от расстояния r . Поскольку величина импульса $p_m(t)$ согласно (3.59) падает со временем, в спектре ускоренных частиц вблизи ударного фронта должны присутствовать в заметном количестве частицы с импульсами $p > p_m(t)$.

13.5. Убегающие частицы. Распределение частиц с импульсами $p > p_m(t)$ можно найти, пользуясь соотношениями (3.52) — (3.54). Для этого удобно разбить область интегрирования в выражении (3.40) на две: от t_0 до t_p и от t_p до t , где время t_p определяется из условия $g_1(p, t_p) = 1$. В области $0 \leq t \leq t_p$ частицам с импульсом p отвечает большой параметр модуляции $g_1 > 1$, вследствие чего в качестве первого приближения к решению в соответствии с (3.42) можно принять

$$f_1^{(1)} = \frac{1}{4 \sqrt{\pi \kappa_1} r} \int_{t_0}^{t_p} \frac{r - R(t')}{(t - t')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[r - R(t')]^2}{4 \kappa_1 (t - t')} \right\} R(t') f_R(t') dt',$$

где функция f_R дается выражением (3.52). Выполняя интегрирование в этом выражении для импульсов $p_m(t_0) \gg p \gg p_m(t)$, что означает $t_0 \ll t_p \ll t$, получим

$$f_1(r, p, t) = f_R(p, t_p) \left(\frac{t}{t_p} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{r^2}{4 \kappa_1 t} \right), \quad (3.62)$$

где

$$f_R(p, t_p) = \frac{N_0(t_p) R(t_p)}{4 \pi p_0^3 (\delta + v)} t_p^{5/2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q}. \quad (3.63)$$

Для поправки Δf , определяющей следующее приближение $f_1^{(2)} = f_1^{(1)} + \Delta f$, можно сделать оценку сверху

$$\Delta f = \frac{f_R(p, t_p) t_p^{3/2}}{\sqrt{4 \pi \kappa_1} r} \int_{t_0}^t \frac{r - R(t')}{(t - t')^{3/2}} \frac{R(t')}{(t')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[r - R(t')]^2}{4 \kappa_1 (t - t')} - \frac{r^2}{4 \kappa_1 t} \right\} dt' < \\ < f_R(p, t_p) \left(\frac{t}{t_p} \right)^{-3/2} \frac{R(t)}{r} \exp \left(-\frac{r^2}{4 \kappa_1 t} \right),$$

которая показывает, что для расстояний $r \gg R(t)$, где и сосредоточена основная доля частиц с импульсами $p \gg p_m(t)$, поправка к решению (3.62) мала.

Частицы с импульсами $p > p_m(t)$ можно назвать убегающими. Они занимают область пространства с характерным размером $R_p \sim \sqrt{\kappa_1(p) t}$, который растет со временем быстрее, чем радиус удар-

ной волны R . Если учесть, что согласно выражению (3.59) $t_p = = t_0 (p/p_0)^{-5\alpha} (2R_0^2/5\kappa_{01}t_0)^5$, спектр убегающих частиц имеет степенной вид

$$j_1(r \ll \sqrt{\kappa_1 t}, p, t) \sim (p/p_0)^{-\alpha - \alpha(15/2 + 2\theta)}. \quad (3.64)$$

Если осуществляется быстро падающий со временем темп инжекции ($\delta < 0$), спектр убегающих частиц будет достаточно жестким; они могут содержать существенную часть полной энергии. В этом случае убегающие частицы будут влиять на структуру и динамику ударной волны.

§ 14. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ АНСАМБЛЕМ УДАРНЫХ ВОЛН

Результаты наблюдений свидетельствуют о том, что в ряде астрофизических объектов возможно развитие сверхзвуковой турбулентности, которая представляет собой ансамбль большого числа хаотически движущихся ударных волн (см. [119—121] и ссылки там). В такой системе частицы имеют возможность взаимодействовать с большим числом ударных волн, и потому спектр ускоренных частиц может отличаться от спектра, генерируемого отдельной ударной волной.

Поскольку, как было показано, протекание ускорения вблизи отдельного ударного фронта в сильной степени определяется значениями параметров модуляции g_1, g_2 , процесс ускорения частиц ансамблем ударных волн удобно рассматривать отдельно для случаев малых и больших значений g . При этом сверхзвуковую турбулентность будем считать совокупностью уединенных волн (солитонов), в каждой из которых гидродинамическая скорость сначала скачком возрастает (ударный фронт) на величину Δu , а затем плавно спадает до нуля.

Скорость распространения такой волны относительно покоящейся среды $u_s = \Delta u \sigma / (\sigma - 1)$, где σ — степень сжатия. Распределение скоростей u примем изотропным и однородным, так что

$$\langle u \rangle = 0, \quad \langle \nabla u \rangle = 0, \quad (3.65)$$

где угловые скобки указывают на усреднение по областям пространства с характерным размером, много большим размера волны R , что эквивалентно усреднению по реализациям случайного поля скоростей $u(\mathbf{r}, t)$.

Основная задача рассмотрения состоит в том, чтобы исходя из диффузионного уравнения (2.2) для функции распределения $f = f + \delta f$ быстрых частиц, которая испытывает случайные флуктуации на характерном пространственном масштабе R , получить уравнение для усредненной функции распределения $f = \langle f \rangle$ и тем самым определить усредненный темп ускорения и равновесный спектр ускоренных частиц.

14.1. Случай сильной модуляции ($g_{1,2} \gg 1$). Как было показано, условие $g \gg 1$ позволяет пренебречь диффузионным членом в уравнении переноса (2.2) и записать его в виде

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -\nabla(u\tilde{f}) + \frac{\nabla u}{3} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^3 \tilde{f}). \quad (3.66)$$

Мы опускаем источник Q в уравнении (3.66), предполагая, что инжекция частиц осуществляется при $p = p_0$ таким образом, что функция распределения имеет заданное значение при $p = p_0$, определяемое, например, условием сшивки с тепловым спектром.

Здесь необходимо отметить один важный момент. Поскольку рассматривается эволюция спектра быстрых частиц, их диффузия в непосредственной окрестности ударного фронта имеет принципиально важное значение. Она, в частности, вызывает однородное распределение частиц в области самого ударного фронта, так как, несмотря на то что мы пренебрегаем величиной диффузионной длины $L = \kappa/u_1$, она по-прежнему намного превышает толщину фронта ($L \gg l$). Именно это обстоятельство, как будет показано, и обуславливает ускорение частиц.

Так как в силу принятого условия $\kappa = 0$ диффузионная длина проникновения ускоряемых частиц в область перед отдельным фронтом $L = \kappa/u$, равна нулю, функция распределения $\tilde{f}(\mathbf{r}, p, t)$ испытывает скачок на ударном фронте (см., например, (2.28)) от значения перед фронтом $f(\mathbf{r}, p, t)$ до некоторого $\tilde{f}_2(\mathbf{r}, p, t)$ сразу за фронтом.

В области разрежения за ударным фронтом, где скорость u меняется плавно, можно записать решение уравнения (3.66) в виде

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, p, t) = \tilde{f}_2(\mathbf{r}_0, ap, t_0), \quad (3.67)$$

где

$$a = \exp \left\{ \frac{1}{3} \int_{t_0}^t \nabla u[s(t'), t'] dt' \right\} \quad (3.68)$$

— коэффициент, отражающий адиабатическое изменение энергии частиц, $s(t)$ — решение краевой задачи

$$\frac{ds}{dt} = u(s, t), \quad s(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad s(t) = \mathbf{r}, \quad (3.69)$$

описывающее траекторию частицы в пространстве, вектор \mathbf{r}_0 задает ее начальное положение, t_0 — момент ее прохождения через ударный фронт.

Заметим, что, поскольку диффузией быстрых частиц мы пренебрегли, они перемещаются в пространстве так же, как элемент среды. В связи с этим удобно выразить дивергенцию скорости u через плотность среды ρ исходя из уравнения непрерывности потока вещества $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0$. Если предположить, что в системе отсчета ударного фронта (вернее, в системе отсчета, связанной с участ-

ком фронта, прошедшим через точку \mathbf{r}_0) изменений плотности среды не происходит ($\partial\rho/\partial t' = 0$), это уравнение можно записать в виде

$$\nabla \mathbf{u}' \rho = 0, \quad (3.70)$$

где $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1(\mathbf{r}_0, t_0)$. Физически это означает, что поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ стационарно.

Выражая с помощью уравнения (3.70) дивергенцию скорости через градиент плотности среды

$$\nabla \mathbf{u} = -\mathbf{u}' \nabla \ln \rho \quad (3.71)$$

и подставляя это соотношение в (3.68), приходим к простому выражению для коэффициента адиабатического замедления

$$a(\mathbf{r}) = [\rho_2(\mathbf{r}_0)/\rho(\mathbf{r})]^{1/3}, \quad (3.72)$$

где $\rho_2 = \sigma \rho_1$ — плотность вещества сразу за ударным фронтом. Плотность невозмущенной среды ρ_1 будем для простоты считать постоянной.

Из выражения (3.72) видно, что степень воздействия отдельной ударной волны на распределение быстрых частиц зависит от величины степени сжатия σ . Поэтому рассмотрим вначале случай слабых ударных волн, когда

$$\sigma - 1 \ll 1 \quad (3.73)$$

и воздействие отдельной ударной волны на распределение быстрых частиц можно считать малым. Такое предположение позволяет считать, что функция распределения (3.67) при $t \geq t_0 + R/u_1$ совпадает с функцией распределения частиц в невозмущенной среде $f(\mathbf{r}, p, t)$. Тогда соотношение (3.67) для функции распределения в области разрежения примет вид

$$f(\mathbf{r}, p, t) = f(\mathbf{r}_0, a' p, t), \quad (3.74)$$

где $a' = (\rho_1/\rho)^{1/3}$. Используя малость величины $a' - 1$, в силу условия (3.73) преобразуем выражение (3.74):

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, p, t) = (1 - s\nabla) \left[f(\mathbf{r}, p, t) + p \frac{\partial f}{\partial p} (a' - 1) \right] + O[(a' - 1)^2]. \quad (3.75)$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (3.66) и усредняя в нем все члены по реализациям случайного поля скоростей, получим уравнение для усредненной функции распределения $f(\mathbf{r}, p, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_i \tilde{\kappa}_{ij} \nabla_j f + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(D p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad (3.76)$$

где

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \left\langle u_i(\mathbf{r}, t) \int_{t_0}^t dt' u_j(s(t'), t') \right\rangle \quad (3.77)$$

— тензор эффективной пространственной диффузии частиц;

$$D = \frac{p^2}{3} \{ \langle \mathbf{V} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) [\rho(\mathbf{r}, t)/\rho_1]^{1/3} \rangle_{\mathbf{V} \mathbf{u} > 0} + \langle \mathbf{V} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) (\rho_2/\rho_1)^{1/3} \rangle_{\mathbf{V} \mathbf{u} < 0} \} \quad (3.78)$$

— коэффициент диффузии в импульсном пространстве. Усреднение в выражении (3.78) ведется отдельно по области сжатия ($\mathbf{V} \mathbf{u} < 0$) и разрежения ($\mathbf{V} \mathbf{u} > 0$). В области ударного фронта, где $\mathbf{V} \mathbf{u} < 0$, значение плотности ρ в выражении (3.78) принято равным $\rho_2 = \rho_1$. Это обстоятельство отражает тот факт, что функция распределения быстрых частиц не испытывает каких-либо заметных изменений в области фронта и может быть принята здесь равной ее значению $f_2(\mathbf{r}_0, p, t)$, которое относится к области непосредственно за ударным фронтом.

Таким образом, как показывает уравнение (3.76), воздействие хаотически движущихся ударных волн на быстрые частицы приводит к двум процессам: эффективной пространственной диффузии частиц и их статистическому ускорению, реализуемому в форме диффузии по импульсу.

Коррелятор $\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{s}(t'), t') \rangle$ отличен от нуля при $|t - t'| \leq R/u_1$, где R — характерный размер ударной волны. Поэтому элементы тензора эффективной диффузии по порядку величины составляет $u_1 R$. Отсюда вытекает предельно ясный смысл эффективной диффузии частиц. Прохождение отдельной ударной волны через какой-либо элемент среды вызывает его перемещение в пространстве вместе с находящимися в нем быстрыми частицами на расстояние R в направлении движения волны u_1 . Случайная последовательность волн обуславливает хаотическое движение каждого элемента, что полностью эквивалентно процессу диффузии.

Эффект ускорения возникает вследствие того, что регулярное ускорение вблизи ударного фронта сообщает в среднем частицам больше энергии, чем они теряют ее при адиабатическом замедлении в расширяющейся области за ударным фронтом. При этом единичный акт взаимодействия с ударной волной может привести и к уменьшению энергии отдельной частицы. Другими словами, ускорение осуществляется лишь в среднем и носит статистический характер.

Выражение (3.78) для коэффициента диффузии по импульсу можно значительно упростить, если воспользоваться соотношением (3.71) и заменить усреднение по реализациям усреднением по времени (предполагается, что случайный процесс $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ эргодичен), что дает

$$D = p^2 v [\sigma^{4/3} \ln \sigma - (\sigma^{4/3} - 1)/3]/3, \quad (3.79)$$

где $v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_s(T)}{T}$ — частота прохождения ударных волн через фиксированный элемент среды, $N_s(T)$ — количество прохождений за время T . По порядку величины

$$v \sim R^2 n_s u_1, \quad (3.80)$$

где n_s — количество ударных волн на единицу объема.

Темп ускорения, который связан с коэффициентом диффузии D соотношением (2.86),

$$\tau_a^{-1} = 4\nu [\sigma^{1/3} \ln \sigma - (\sigma^{1/3} - 1)/3]/3 \quad (3.81)$$

оказывается величиной первого порядка по скорости ударных волн u_1 .

Сверхадиабатический характер процесса ускорения частиц ансамблем ударных волн особенно наглядно можно проследить, если обратиться к противоположному случаю, когда пробег частиц меньше толщины ударного фронта. Тогда соотношение (3.74) справедливо всюду, в том числе и в области ударного фронта, что, если повторить все выкладки, приводит вместо (3.78) к выражению

$$D = \frac{p^2}{3} \left\langle \nabla \mathbf{u} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{1/3} \right\rangle$$

для коэффициента диффузии по импульсу. Нетрудно убедиться в том, что процедура усреднения дает $D=0$, а значит, если бы быстрые частицы на ударном фронте вели себя адиабатически, то энергия, приобретаемая ими при сжатии среды на ударном фронте, в точности компенсировалась бы потерями в области расширения за фронтом и эффект ускорения отсутствовал бы.

Уравнение переноса для усредненной функции распределения быстрых частиц (3.76) в однородной безграничной среде допускает стационарное решение

$$f(p) = f(p_0) (p/p_0)^{-3}. \quad (3.82)$$

Этот спектр можно получить также другим, более наглядным способом. Каждое следующее $(i+1)$ -е прохождение ударной волны через элемент объема среды меняет спектр находящихся в нем частиц, сформированный предыдущей i -й ударной волной, в соответствии с выражением

$$f_{i+1}(p) = \int_0^\infty f_i(p') G(a_1 p, p') dp' + \int_0^\infty Q_0(p') G(a_1 p, p') dp', \quad (3.83)$$

где $G(p, p')$ — функция Грина (2.30) задачи регулярного ускорения идеальной ударной волной, Q_0 — источник частиц на ударном фронте, $a_1 = (\rho_2/\rho_1)^{1/3}$ — коэффициент адиабатического замедления частиц за ударным фронтом. Подставляя в это уравнение степенную функцию $f_{i+1} = f_i = A p^{-q}$, получим уравнение для показателя

$$q = \frac{3\sigma}{\sigma-1} (1 - \sigma^{-q/3});$$

последнее, как и само уравнение переноса (3.76), допускает решения $q=0$ и $q=3$, из которых второе может быть признано имеющим физический смысл. Интересно отметить, что это решение соответствует универсальному спектру $f \sim p^{-3\sigma/(\sigma-1)}$, формируемому ударной волной с бесконечной степенью сжатия σ .

Уравнение переноса (3.76) применимо также для ударных волн с произвольной степенью сжатия начиная с момента времени, когда функция распределения становится близкой к равновесной, поскольку используемый при выводе ряд Тейлора (3.75) в этом случае сходится достаточно хорошо. Если состояние быстрых частиц далеко от равновесного, для сильных ударных волн оно не может быть описано уравнением (3.76) или любым другим дифференциальным уравнением. Адекватность дифференциального уравнения для функции распределения, в частности, означает, что энергия частиц в каждом акте взаимодействия меняется относительно небольшими порциями, отражением чего являются незначительные изменения функции распределения. Для сильных ударных волн, как это видно, например, из уравнения (3.83), единичное взаимодействие с ударной волной может привести к кардинальным изменениям распределения частиц.

14.2. Случай слабой модуляции ($g_{1,2} \ll 1$). Когда диффузия частиц преобладает над их конвекцией, можно считать, что функция распределения f будет испытывать слабые изменения на характерном пространственном масштабе R относительно усредненной функции распределения $f = \langle f \rangle$, масштаб изменения которой значительно превышает R . Другими словами,

$$|\delta f| \ll f, \quad (3.84)$$

где осциллирующая часть функции распределения определяется соотношением

$$\bar{f} = f + \delta f, \quad \langle \delta f \rangle = 0. \quad (3.85)$$

Подставляя функцию распределения быстрых частиц (3.85) в уравнение переноса (2.2) и осуществляя процедуру усреднения всех его членов по реализациям случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, получим [119—121]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \nabla^2 f - \langle \mathbf{u} \nabla \delta f \rangle + \frac{1}{3} p \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta f \nabla \mathbf{u} \rangle. \quad (3.86)$$

При этом для простоты диффузия считается изотропной.

Члены первого порядка по осциллирующим функциям \mathbf{u} и δf , которые при усреднении обратились в нуль, удовлетворяют уравнению [119—121]

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \delta f + \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} \nabla \mathbf{u}.$$

Решение этого уравнения

$$\delta f(\mathbf{r}, p, t) = \int \int \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} \nabla \mathbf{u} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt' \quad (3.87)$$

выражается через функцию Грина уравнения диффузии

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = [4\pi \kappa (t - t')]^{-3/2} \exp \left[-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\kappa (t - t')} \right]. \quad (3.88)$$

Постановка выражения (3.87) в уравнение (3.86) с учетом слабого изменения функции f на масштабе R дает

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \nabla^2 f + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(D p^3 \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad (3.89)$$

где коэффициент диффузии по импульсу

$$D = \frac{p^2}{9} \left\langle \int \mathbf{V} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt' \right\rangle. \quad (3.90)$$

Выполняя несложные преобразования в этом выражении, можно получить

$$D = \frac{p^2 \langle u^2 \rangle}{9\kappa} + \frac{p^2}{9\kappa} \nabla \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \int \mathbf{V} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt' \right\rangle + \\ + \frac{p^2}{9\kappa} \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \int \mathbf{u}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial t'} d^3 \mathbf{r}' dt' \right\rangle. \quad (3.91)$$

Второй член в правой части этого выражения при усреднении обращается в ноль, если поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ считать изотропным. Третий член по порядку величины отличается от первого фактором $(Ru/\kappa)^{3/2}$, где R — радиус корреляции или характерный размер ударных волн. В силу принятого в самом начале условия $\kappa \gg Ru$, этот фактор мал, поэтому третьим членом в правой части выражения (3.91) можно пренебречь.

Таким образом, в случае слабой модуляции процесс ускорения частиц ансамблем ударных волн представляет собой диффузию в импульсном пространстве с коэффициентом диффузии

$$D = p^2 \langle u^2 \rangle / 9\kappa. \quad (3.92)$$

Отсюда видно, что никакие специфические особенности ударных волн в ускорении частиц не проявляются и что процесс ускорения полностью аналогичен статистическому ускорению частиц в турбулентной среде. Характерный темп ускорения, определяемый коэффициентом диффузии (3.92), согласно соотношению (2.86),

$$\tau_a^{-1} = 4 \langle u^2 \rangle / 9\kappa \quad (3.93)$$

является величиной второго порядка по малому параметру u/v в отличие от случая сильной модуляции.

14.3. Коллективный механизм ускорения космических лучей ансамблем крупномасштабных ударных волн. Вследствие большого уровня возмущенности коэффициент диффузии за ударным фронтом для некоторого диапазона энергий частиц может оказаться значительно меньше его значения в невозмущенной области κ_1 . Наиболее вероятна реализация подобной ситуации в случае ансамбля крупномасштабных ударных волн. Примером такого рода могут служить ударные волны в Галактике от всплесков сверхновых. Поэтому остановимся на процессе ускорения частиц ансамблем сферических ударных волн, расширяющихся в однородной среде по закону $R(t)$.

Прежде всего заметим, что частицы, для которых $g_1 \ll 1$, практически не ускоряются отдельной ударной волной, поскольку они быстро покидают окрестность ударного фронта, не испытывая еще заметного приращения энергии. Вместе с тем такие частицы имеют возможность, взаимодействуя с другими ударными волнами, продолжать ускоряться [115, 122, 123].

Исходя из самых общих соображений, можно показать, что спектр ускоряемых таким образом частиц будет в точности таким же, как и на фронте отдельной ударной волны. Действительно, как показано в гл. 1, универсальная форма спектра ускоренных частиц является следствием выполнения двух условий: 1) при двукратном пересечении фронта среднее приращение импульса частицы составляет $\langle \Delta p \rangle = \frac{4}{3} \frac{\Delta u}{v} p$; 2) вероятность того, что частица вернется к фронту из области перед фронтом, $P_1 = 1$, из области за фронтом — $P_2 = 1 - 4u_2/v$. При этом совершенно безразлично, взаимодействует ли частица каждый раз с одним и тем же фронтом либо с разными. Оба эти условия выполнены, если выполняется соотношение $g_2 \gg 1$, а также если характерное время τ , пребывания частиц в объеме V , в котором заключены ударные волны, много больше времени ускорения τ_a . Чтобы установить, какими факторами в данном случае определяется характерное время ускорения, рассмотрим этот процесс более детально.

Пусть в системе с объемом V в каждый момент времени присутствует некоторое число N , крупномасштабных ударных волн, расширяющихся по известному закону. Будем считать, что по достижении некоторого максимального размера $R_i = R(t_i)$ ударные волны диссипируют, точнее, перестают оказывать модулирующее, а следовательно, и ускоряющее воздействие на быстрые частицы из-за того, что к данному моменту параметр модуляции в области за ударным фронтом становится мал ($g_2(t_i) = 1$). В стационарном состоянии на смену этим волнам рождаются новые, так что общее их количество в системе N , неизменно.

В силу принятого условия $g_1 \ll 1$ быстрые частицы в пространстве между ударными волнами слабо ими модулируются и имеют распределение, близкое однородному. За фронтом каждой ударной волны, напротив, из-за условия $g_2 \gg 1$ частицы сильно модулируются и их распределение здесь описывается выражением (3.60) при $\delta = 0$. Другими словами, в окрестности отдельной ударной волны радиусом R распределение частиц можно записать в виде

$$f(r, p) = \begin{cases} f(p) (r/R)^{3\sigma}, & r \leq R, \\ f(p), & r \geq R. \end{cases} \quad (3.94)$$

Будем для простоты считать, что частицы, находящиеся в области за фронтом ударной волны, при ее диссипации безвозвратно гибнут, имея в виду следующее: прежде чем попасть во внешнюю область, они подвергаются некоторому адиабатическому замедлению, связанному с расширением среды, в силу чего их дифференциальная плотность оказывается незначительной.

Сделанные предположения позволяют без труда получить уравнение для дифференциальной плотности ускоряемых частиц $n(p)$. Для этого достаточно почленно проинтегрировать уравнение переноса (2.2), домножив его предварительно на $4\pi p^2$, что с учетом (3.94) дает

$$\frac{n}{\tau} + \frac{1}{\tau_a} \frac{d}{dp} (np) + \frac{n}{\tau_e} = 0, \quad (3.95)$$

где

$$\tau_a = V \int \sum_{i=1}^{N_s} \frac{4\pi}{3} R_i^2 \dot{R}_i \frac{\sigma_i - 1}{\sigma_i + 1} \quad (3.96)$$

— характерное время ускорения частиц, обусловленное коллективным воздействием всех N_s ударных волн,

$$\tau_e = n \left/ \left(- \int_{\Sigma} \kappa \frac{\partial n}{\partial r} ds \right) \right.$$

— среднее время пребывания частиц в системе, ограниченное их диффузионным выходом через границу Σ объема V ,

$$\tau = V \int \sum_{i=1}^{N_s} 4\pi R_i^2 \dot{R}_i \sigma_i / (\sigma_i + 1)$$

— характерное время гибели частиц в областях за ударными фронтами.

Решением уравнения (3.95) является степенная функция

$$n \sim p^{-1}, \quad \gamma = \tau_a/\tau + \tau_a/\tau_e. \quad (3.97)$$

В случае, когда все N_s ударных волн являются одинаково сильными ($\sigma_i = \sigma$), показатель спектра

$$\gamma = (\sigma + 2)/(\sigma - 1) + \tau_a/\tau_e \quad (3.98)$$

для области импульсов, где время жизни частиц в системе намного превышает время их ускорения ($\tau_e \gg \tau_a$), такой же, как для частиц, ускоряющихся отдельной ударной волной. Иначе говоря, частицы, которые в области импульсов $p > p_m$, где $g_1 < 1$, ускоряются коллективным воздействием всех имеющихся в системе ударных волн, составляют единый спектр с теми частицами ($p \leq p_m$, $g_1 \geq 1$), что ускорены суммарным вкладом отдельных ударных волн.

С формальной точки зрения эффект ускорения, описываемый вторым членом в уравнении (3.95), явился результатом усреднения величины

$\frac{\nabla \mathbf{u}}{3} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^3 f)$ по пространству. Когда частицы сильно

модулируются в области за ударным фронтом ($g_2 \gg 1$), их концентрация здесь существенно понижена (см. выражение (3.94)). Поэтому усреднение величины $\nabla \mathbf{u} f$ дает отличный от нуля в первом порядке по u результат. Другими словами, частицы ускоряются потому, что на ударном фронте, где $\nabla \mathbf{u} < 0$, их концентрация значительно выше, чем за ударным фронтом, где происходит их замедление

($\nabla u > 0$). При ослаблении модуляции за ударным фронтом ($g_2 < 1$) распределение частиц в отличие от (3.94) становится близким к однопородному, вследствие чего величина $\langle \nabla u f \rangle$ близка к нулю.

Заметим, что, поскольку слабая модуляция существует и при $g_2 \ll 1$, величина $\langle \nabla u f \rangle$ остается отличной от нуля; только в этом случае она, а следовательно, и темп ускорения будут второго порядка по малой величине \dot{R}/v , что соответствует рассмотренному случаю слабой модуляции, описываемому уравнением (3.89).

Таким образом, максимальный импульс частиц, ускоряемых посредством коллективного механизма

$$p_m = \min \{p'_m, p''_m\}, \text{ где } g_2(p'_m) = 1, \tau_e(p''_m) = \tau_a, \quad (3.99)$$

ограничивается либо возрастанием скорости выхода частиц из системы (уменьшением времени пребывания в системе τ_e с ростом импульса), либо ослаблением модуляции ударными волнами частиц с большими импульсами. Коллективное ускорение частиц будет иметь существенное значение в тех случаях, когда эта величина p_m окажется больше максимального импульса частиц, генерируемых отдельной ударной волной.

Глава 4

МЕТОД ПОКОЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ

Как было показано в гл. 1, процесс регулярного ускорения заключается в многократном пересечении частицами фронта ударной волны. Величина набранной частицей энергии определяется количеством пересечений ею ударного фронта. В связи с этим частицы, находящиеся вблизи фронта, удобно различать по числу совершенных ими циклов и объединять в поколения: все частицы, совершившие одинаковое количество k циклов пересечения фронта, составляют k -е поколение.

Эффективное использование метода последовательных поколений (если не прибегать к громоздким его обобщениям) возможно только в случае ударной волны, толщина фронта которой намного меньше свободного пробега частиц до рассеяния. Метод поколений дает возможность детально описать процесс регулярного ускорения, наиболее отчетливо выявить все основные его физические особенности. В зарубежной литературе такой подход именуется микроскопическим (см. обзор [52]).

Заметим, что метод последовательных поколений широко используется в физике, когда рассматриваются процессы, в которых наряду с плавным, непрерывным изменением тех или иных параметров происходят события дискретного характера. Так, этот метод

применяется при описании каскадного развития широких атмосферных ливней в земной атмосфере, которые возникают при взаимодействии высокоэнергичных ядер космических лучей с атомами атмосферы [124]. Другим примером успешного использования метода поколений может служить исследование размножения нейтронов в среде [125].

§ 15. КИНЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МЕТОДЕ ПОКОЛЕНИЙ

15.1. Основные положения. В основе метода поколений в применении к задаче регулярного ускорения лежит рекуррентное соотношение, связывающее плотности потоков частиц последующих поколений через ударный фронт [126, 127]:

$$J_k(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(p, t; p', t') J_{k-1}(p', t') dp' dt'. \quad (4.1)$$

Отсюда видно, что главным в этом методе является вычисление плотности вероятности $G(p, t; p', t')$. Эта величина дает вероятность перехода частицы из состояния с импульсом p' в момент времени t' к состоянию с импульсом p за время совершения одного цикла ускорения $\Delta t = t - t'$. Знание этой величины позволяет, задавая начальный поток частиц $J_0(p, t)$ и последовательно используя соотношение (4.1), найти истинный поток частиц через поверхность фронта, представляющий собой сумму потоков частиц всех поколений

$$J(p, t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k(p, t). \quad (4.2)$$

В каждом конкретном случае, когда речь идет о потоке частиц через фронт, необходимо уточнять, о каком из двух возможных направлений идет речь — вдоль или против движения среды, или, если говорить о плоской ударной волне, распространяющейся против направления оси X , — вдоль или против оси X . В дальнейшем, там где это необходимо, будем использовать для обозначения направления величин знаки «плюс» и «минус» соответственно.

Плотность потока частиц через фронт определяется функцией распределения частиц на фронте (т. е. в точке $x=0$) посредством общего соотношения (2.8), взятого при $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$ для J_+ и $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi$ для J_- :

$$\begin{aligned} J_+(p, t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} v \cos \theta p^2 f_1(x=0, p) \sin \theta d\theta d\varphi, \\ J_-(p, t) &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} v \cos \theta p^2 f_2(x=0, p) \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где индексы 1 и 2 по-прежнему указывают на принадлежность величин к области за и перед ударным фронтом.

Если благодаря частым рассеяниям частиц их угловое распределение близко к изотропному, то имеет место простая связь между плотностью потока и изотропной частью функции распределения

$$J_{\pm}(p, t) \simeq \pm p^2 v f_{1,2}(x=0, p, t). \quad (4.4)$$

Таким образом, знание потока частиц через фронт позволяет определять спектр ускоренных частиц на ударном фронте, что является основной частью задачи регулярного ускорения.

В стационарном случае соотношение (4.1) записывается в виде

$$J_k(p) = \int_0^{\infty} G(p, p') J_{k-1}(p') dp', \quad (4.5)$$

причем стационарная плотность вероятности связана с величиной $G(p, t; p', t')$ простым соотношением

$$G(p, p') = \int_{-\infty}^{\infty} G(p, t; p', t') dt.$$

Проинтегрированная по t плотность вероятности $G(p, t; p', t')$ не зависит от времени t' вследствие того, что в силу принципа причинности и однородности времени вероятность перехода $G(p, t; p', t')$ зависит от аргументов t и t' через их разность $t - t'$.

Интересно также отметить, что плотность вероятности $G(p, p')$ удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского — Колмогорова, вид которого можно установить, суммируя соотношение (4.5):

$$J(p) = J_0(p) + \int_0^{\infty} G(p, p') J(p') dp'. \quad (4.6)$$

В свою очередь, используя стандартную процедуру, интегральное уравнение (4.6) можно свести к дифференциальному уравнению Фоккера — Планка. Для этого (см., например, [128]) обе части уравнения (4.6) пужно домножить на произвольную функцию импульса $\varphi(p)$, удовлетворяющую единственному условию: она должна стремиться к нулю быстрее любой степени p при увеличении аргумента. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора

$$\varphi(p) = \varphi(p') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p - p')^n}{n!} \frac{d^n \varphi}{dp^n}$$

и интегрируя каждое слагаемое по частям необходимое число раз с учетом произвольности функции $\varphi(p)$, получим дифференциаль-

ное уравнение [51]

$$J(p) \left[1 - \int_0^{\infty} G(p', p) dp' \right] = \\ = J_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dp^n} [\delta_n(p) J(p)], \quad (4.7)$$

где $\delta_n(p) = \int_0^{\infty} (p' - p)^n G(p', p) dp'$.

Из физических соображений ясно, что за один цикл поток частиц меняется слабо, т. е. переходы с большим изменением импульса $p - p'$ маловероятны. Поэтому для получения приближенного решения уравнения Фоккера — Планка можно ограничиться конечным числом (двумя, тремя) членов. Однако усеченное таким образом уравнение (4.7) дает во многих случаях лишь грубое описание процесса регулярного ускорения [51].

Таким образом, наглядное и последовательное описание процесса регулярного ускорения может быть достигнуто в рамках метода поколений, основу которого составляет соотношение (4.1). При этом в каждом конкретном случае задача состоит в отыскании вероятности перехода $G(p, t; p', t')$.

15.2. Одномерная кинетическая модель. Метод поколений, если он основывается на кинетическом уравнении, является более общим способом описания процессов ускорения по сравнению с изложенным ранее диффузионным подходом. Однако применение метода поколений позволяет более строго обосновать результаты, полученные в рамках диффузионного подхода. При этом достаточно рассмотреть процесс ускорения в рамках предельно упрощенной одномерной модели, в которой реальные перемещения частиц в трехмерном пространстве представляются в виде одномерного движения вдоль определенного направления, задаваемого условиями задачи. В рассматриваемом нами случае это направление, вдоль которого распространяется ударная волна. В остальном по-прежнему характер движения заряженных частиц определяется их рассеяниями на неоднородностях магнитного поля, «вмороженных» в среду. При всей упрощенности одномерных моделей они, как показывает практика [125, 129], во многих случаях удовлетворительно описывают процессы диффузионного типа, развивающиеся в реальном трехмерном пространстве.

Предполагая по-прежнему, что рассеяния частиц осуществляются упруго, их распространение в рассеивающей среде можно описать достаточно полно и последовательно, вводя феноменологический параметр τ (среднее время между рассеяниями), на основе кинетического уравнения Больцмана, которое в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \tau \frac{\partial f}{\partial x} = S \tau f, \quad (4.8)$$

где $\mu = v_x/v$ — косинус угла между направлением движения частицы и осью X . Интеграл столкновений имеет особенно простой вид в сопутствующей, движущейся вместе со средой системе отсчета

$$\text{St } f_u(v_u, \mu_u) = \frac{\langle f_u \rangle}{\tau(v_u, \mu_u)} - f_u(v_u, \mu_u) \int_{-1}^1 \frac{d\mu'_u}{\tau(v_u, \mu'_u)}, \quad (4.9)$$

где угловые скобки означают усреднение по μ :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) d\mu,$$

а индекс u указывает на принадлежность к сопутствующей системе отсчета.

Связь между сопутствующей и лабораторной (в нашем случае это система покоя ударного фронта) системами отсчета задается законом преобразования скоростей

$$v = v_u + u, \quad (4.10)$$

если ограничиться для простоты рассмотрением нерелятивистских частиц ($v \ll c$).

Одномерной модели, в которой угловое распределение частиц представляет собой два пучка, направленных в противоположные направления, отвечает функция распределения вида

$$f(v, \mu) = f_+(v) \delta(\mu - 1) + f_-(v) \delta(\mu + 1). \quad (4.11)$$

Величины f_{\pm} в этом соотношении суть функции распределения для частиц, движущихся вдоль и против оси X соответственно.

Предположение об одномерном движении частиц задает также характер функции $\tau(v_u, \mu_u)$:

$$\tau^{-1}(v_u, \mu_u) = \tau^{-1}(v_u) \delta(|\mu_u| - 1), \quad (4.12)$$

который в явном виде показывает, что после каждого акта рассеяния частица может двигаться только вдоль оси X .

Для практического использования кинетического уравнения (4.8) необходимо входящие в него величины привести к единой системе отсчета. В случае одномерной модели распространения частиц удобно пользоваться лабораторной системой отсчета.

Выполняя переход в интеграле столкновений (4.9) к лабораторной системе отсчета, ограничившись для простоты случаем, когда среднее время между рассеяниями $\tau(v_u)$ не зависит от скорости частицы, и учитывая соотношение (4.12) и инвариантность функции распределения

$$f(v, \mu) = f_u(v_u, \mu_u), \quad (4.13)$$

можно записать

$$\text{St } f(v, \mu) = \frac{\delta(|\mu| - 1)}{2 \left| \frac{d\mu_u}{d\mu} \right| \tau} \int_{-1}^1 d\mu' f(v', \mu') \frac{d\mu'_u}{d\mu'} - f(v, \mu) / \tau. \quad (4.14)$$

Связь между скоростями v' и v задается тем обстоятельством, что в сопутствующей системе отсчета они имеют одинаковый модуль:

$$v_u = v'_u, \quad (4.15)$$

что отражает упругий характер рассеяний.

Используя закон преобразования скоростей (4.10), нетрудно получить

$$\frac{d\mu_u}{d\mu} = \frac{v^3}{v_u^3(v_u + \mu u)}. \quad (4.16)$$

Выполняя интегрирование в правой части выражения (4.14) с использованием соотношений (4.11), (4.15) и (4.16), получим окончательный вид кинетического уравнения в лабораторной системе отсчета

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial x} = & \frac{[v + (1 - \mu)u]^2}{2\tau v^2} f(v + (1 - \mu)u, 1) + \\ & + \frac{[v - (1 + \mu)u]^2}{2\tau v^2} f(v - (1 + \mu)u, -1) - \frac{f}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если использовать представление функции распределения в форме (4.11), то уравнение (4.17) сведется к системе уравнений для функций распределения пучков f_{\pm} :

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} + v \frac{\partial f_+}{\partial x} = \frac{(v - 2u)^2}{2\tau v^2} f_-(v - 2u) - \frac{f_+}{2\tau}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial f_-}{\partial t} - v \frac{\partial f_-}{\partial x} = \frac{(v + 2u)^2}{2\tau v^2} f_+(v + 2u) - \frac{f_-}{2\tau}. \quad (4.19)$$

Процесс регулярного ускорения частиц плоской ударной волной может быть описан уравнениями (4.18) и (4.19), если их дополнить условием непрерывности функции распределения на ударном фронте ($x = 0$): $f_{1-} = f_{2-}$, $f_{1+} = f_{2+}$.

Чтобы установить связь кинетических уравнений (4.18) и (4.19) с диффузионным способом описания, достаточно использовать разложение входящих в них величин по малому параметру u/v , пренебрегая вкладом членов старше первой степени, что дает:

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} + v \frac{\partial f_+}{\partial x} = \frac{v - 4u}{2\tau v} f_- - \frac{f_+}{2\tau} - \frac{u}{\tau} \frac{\partial f_-}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f_-}{\partial t} - v \frac{\partial f_-}{\partial x} = \frac{v + 4u}{2\tau v} f_+ - \frac{f_-}{2\tau} + \frac{u}{\tau} \frac{\partial f_+}{\partial v}.$$

Складывая и вычитая два этих уравнения, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{2u}{\tau v} f_x + \frac{u}{\tau} \frac{\partial f_x}{\partial v}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f_x}{\tau} - \frac{2u}{\tau v} f - \frac{u}{\tau} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (4.21)$$

для величин

$$f = (f_+ + f_-)/2 \text{ и } f_x = (f_+ - f_-)/2.$$

Нетрудно видеть, что величина $f(v)$ является изотропной частью функции распределения $f(v)$, имеющей вид (4.11), а f_x — ее первый угловой момент.

Для состояний, близких к равновесному, производной $\partial f_x / \partial t$ в уравнении (4.21) можно пренебречь, что приводит к выражению для первого углового момента

$$f_x = -\tau v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f). \quad (4.22)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.20), если при этом пренебречь квадратичными по u/v членами, дает уравнение для изотропной части функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (uf) + \frac{du}{dx} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f), \quad (4.23)$$

в котором $\kappa = \tau v^2$ — коэффициент диффузии частиц в одномерной модели.

Таким образом, кинетическое уравнение (4.17) для быстрых частиц эквивалентно диффузионному уравнению (4.23). При этом диффузионное уравнение (4.23) в одномерной модели практически полностью совпадает по форме с обычным диффузионным уравнением переноса (2.2). Единственное отличие состоит в численном множителе перед третьим членом в правой части уравнения (4.23). Как уже отмечалось, этот член отражает процесс адиабатического изменения величины скорости частиц, которая, как следует из (4.23), в одномерной модели должна меняться в соответствии с уравнением

$$\left\langle \frac{dv}{dt} \right\rangle = -\frac{du}{dx} v. \quad (4.24)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.4), видим, что темп адиабатического изменения энергии частиц в одномерной модели в три раза завышен, что, конечно, нужно учитывать при интерпретации результатов.

15.3. Стационарная форма спектра. Отыскание стационарного спектра ускоренных частиц на фронте плоской ударной волны на основе уравнений (4.18), (4.19) и рекуррентного соотношения (4.5) удобно выполнить, решая задачу по отдельности для области 1 ($x < 0$) перед фронтом и области 2 ($x > 0$) за фронтом ударной волны. При этом плотность вероятности $G(v, v')$, определяющая связь между поколениями, выразится в виде свертки от двух других

$$G(v, v') = \int_0^\infty G_1(v, v'') G_2(v'', v') dv'', \quad (4.25)$$

каждая из которых $G_{1,2}(v, v')$ имеет смысл плотности вероятности перехода частицы из состояния со скоростью v' в состояние v за полуцикл, т. е. за время пребывания в области 1 и 2 соответственно.

Пользуясь общим соотношением (4.3) и выражением (4.11) для функции распределения, нетрудно установить связь между плотностью потока частиц через фронт и функцией распределения в одномерной модели

$$J_{\pm}(v, t) = \pm 2\pi v^3 f_{\pm}(x=0, v, t). \quad (4.26)$$

Для отыскания величин $G_{1,2}(v, v')$ необходимо, задавая начальный поток входящих в соответствующую область частиц $J_{\mp}(v)$, решить стационарную систему уравнений (4.18) и (4.19) и тем самым найти поток выходящих частиц $J_{\pm}(v)$. Другими словами, краевые условия для областей 1 и 2 имеют вид

$$f_{\mp}(x=0, v) = \mp \frac{J_{\pm}(v)}{2\pi v^3}, \quad (4.27)$$

где верхний индекс отвечает области 1, нижний — области 2.

Решая уравнения (4.18) и (4.19) в стационарном случае с учетом граничного условия (4.27), нетрудно установить, что поток частиц, выходящих из области перед фронтом, связан с потоком входящих в эту область частиц простым соотношением: $J_+(v) = -J_-(v - 2u_1)$. Для области за фронтом аналогичное соотношение имеет вид: $J_-(v) = -[v/(v + 2u_2)]J_+(v + 2u_2)$.

Учитывая связь (4.5) между потоками частиц последующих поколений, а также соотношение (4.25), нетрудно получить выражения для вероятностей переходов

$$G_1(v, v') = \delta(v - v' - 2u_1), \quad (4.28)$$

$$G_2(v, v') = (v/v')\delta(v - v' + 2u_2). \quad (4.29)$$

Смысл этих выражений предельно прост и нагляден. Из области перед ударным фронтом ($x < 0$) частицы возвращаются с вероятностью

$$P_1 = \int_0^{\infty} G_1(v, v') dv = 1, \quad (4.30)$$

получив приращение скорости $\Delta v_1 = 2u_1$. Вероятность возвращения частиц из области за фронтом

$$P_2 = \int_0^{\infty} G_2(v, v') dv \simeq 1 - 2u_2/v \quad (4.31)$$

меньше единицы. Это означает, что благодаря конвекции доля частиц $2u_2/v$ от полного числа частиц в каждом полуцикле уносится от фронта и выбывает из процесса ускорения. Кроме того, как следует из выражения (4.29), в области за фронтом изменение

скорости частиц составляет $\Delta v_2 = -2u_2$. Значит, за каждый цикл ускорения частица приобретает приращение скорости

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2\Delta u.$$

Выражения (4.30) и (4.31), определяющие вероятность $P_c = P_1 P_2$ того, что частица совершит очередной цикл ускорения, позволяют без труда вычислить среднее число совершаемых частицами циклов, прежде чем они конвективно унесутся в область за ударным фронтом:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=c}^{\infty} k P_c^k (1 - P_c) = 2u_2/v \sum_{k=0}^{\infty} k (1 - 2u_2/v)^k \simeq v/2u_2.$$

Ограничиваясь наиболее простым и вместе с тем интересным случаем инжекции моноэнергетических частиц на ударном фронте $J_0(v) = u_1 N_0 \delta(v - v_0)$, нетрудно, используя соотношения (4.5), (4.28) и (4.29), получить стационарный спектр ускоренных частиц на ударном фронте

$$f(x=0, v) = \frac{u_1 N_0}{2\pi v_0^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_k}{v_0}\right)^{-2-u_1/\Delta u} \delta(v - v_k), \quad (4.32)$$

где $v_k = v_0 \exp(2k\Delta u/v_0)$ — скорость частиц k -го поколения.

Таким образом, результирующий стационарный спектр ускоренных частиц на ударном фронте представляет собой сумму дельтообразных слагаемых. Эта особенность спектра — следствие того, что в рассматриваемой одномерной модели изменение скорости частицы в каждом акте рассеяния составляет $\Delta v = \pm 2u$. В случае реальных пространственных движений частиц согласно выражению (1.12) величина изменения скорости существенно зависит от направления движения частиц до и после рассеяния. В данной модели это обстоятельство можно учесть усреднением спектра частиц по интервалу скоростей $\Delta v = 2\Delta u$. Эта процедура, которая с учетом малости величины $\Delta v/v \ll 1$ эквивалентна замене суммирования в выражении (4.32) интегрированием, приводит к непрерывному степенному спектру

$$f(x=0, v) = \frac{N_0 u_1}{4\pi v_0^3 \Delta u} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-q} \theta(v - v_0) \quad (4.33)$$

с показателем $q = 2 + u_1/\Delta u$.

Можно показать, что отличие показателя найденного спектра (4.33) от значения q , соответствующего диффузионной модели (см. выражения (2.31) и (2.32)), полностью обусловлено издержками одномерности используемой здесь модели распространения частиц. Действительно, скорость частиц в одномерной модели логично сопоставлять со средней скоростью реального их перемещения вдоль оси $|v_x|$, которая, если учесть, что распределение частиц в окрестности ударного фронта близко к изотропному, равна $\langle |v_x| \rangle = v/2$. Замена v на $v/2$ приводит, в частности, вместо (4.31) к вероятно-

сти возвращения частиц из области за ударным фронтом $P_2 = 1 - 4u_2/v$, что согласуется с выражением (1.15). Если, кроме того, вместо $\Delta v = 2\Delta u$ использовать вытекающее из (1.12) значение среднего приращения скорости частицы за один цикл пересечения фронта $\Delta v = (4/3)\Delta u$ и повторить проделанные выше выкладки, получится степенной спектр ускоренных частиц с показателем $q = 3u_1/\Delta u$, совпадающим со значением, отвечающим диффузионному способу описания.

15.4. Характерное время ускорения. Установление характера развития процесса регулярного ускорения во времени, которое сводится к нахождению плотности вероятности $G(p, t; p', t')$ с последующим применением соотношения (4.1), можно осуществить, решая кинетические уравнения (4.18) и (4.19) раздельно для областей 1 и 2, дополнив их граничными условиями:

для области 1

$$f_-(x=0, v, t) = -J_-(v, t)/(2\pi v^3), \quad f_+(x, v, t=0) = 0, \quad (4.34)$$

для области 2

$$f_+(x=0, v, t) = J_+(v, t)/(2\pi v^3), \quad f_-(x, v, t=0) = 0. \quad (4.35)$$

Решение этой задачи удобно выполнить, переходя в уравнениях (4.18) и (4.19) к лаплас-образам по времени

$$\bar{f}(x, v, s) = \int_0^\infty f(x, v, t) e^{-st} dt,$$

что дает

$$s\bar{f}_+ + v \frac{\partial \bar{f}_+}{\partial x} = \frac{(v-2u)^2}{2\tau v^2} \bar{f}_-(v-2u) - \frac{\bar{f}_+}{2\tau}, \quad (4.36)$$

$$s\bar{f}_- - v \frac{\partial \bar{f}_-}{\partial x} = \frac{(v+2u)^2}{2\tau v^2} \bar{f}_+(v+2u) - \frac{\bar{f}_-}{2\tau}. \quad (4.37)$$

Посредством несложных математических преобразований, учитывая постоянство скорости среды u , в областях 1 и 2 можно перейти от системы уравнений (4.36), (4.37) к уравнениям относительно каждой из величин \bar{f}_+ и \bar{f}_- в отдельности:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_+}{\partial x^2} - \frac{(1+2\tau s)u}{\tau v(v-2u)} \frac{\partial \bar{f}_+}{\partial x} - \frac{s(1+\tau s)}{\tau v(v-2u)} \bar{f}_+ = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_-}{\partial x^2} - \frac{(1+2\tau s)u}{\tau v(v+2u)} \frac{\partial \bar{f}_-}{\partial x} - \frac{s(1+\tau s)}{\tau v(v+2u)} \bar{f}_- = 0.$$

Решение этих уравнений, отвечающее краевому условию (4.34), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_+(v) &= -\frac{J_-(v-2u_1)}{2\pi(v-2u_1)v^2} \frac{\exp(\alpha^+ x)}{1+2\tau(s+\alpha_1 v)}, \\ \bar{f}_-(v) &= -\frac{\bar{J}_-(v)}{2\pi v^3} \exp(\alpha^- x), \end{aligned} \quad (4.38)$$

а для краевого условия (4.35) —

$$\begin{aligned}\bar{f}_+(v) &= \frac{\bar{J}_+(v)}{2\pi v^3} \exp(\alpha_2^+ x), \\ \bar{f}_-(v) &= \frac{\bar{J}_+(v + 2u_2)}{2\pi(v + 2u_2)v^2} \frac{\exp(\alpha_2^- x)}{1 + 2\tau[s - \alpha_2 v]},\end{aligned}\quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_i^\pm &= a_i^\mp/2 - (-1)^i \sqrt{(a_i^\pm)^2/4 + b_i^\pm}, \\ a_i^\pm &= \frac{(1 + 2\tau s) u_i^\pm}{\tau v [v \mp 2u_i]}, \\ b_i^\pm &= \frac{s(1 + \tau s)}{\tau v [v \mp 2u_i]}.\end{aligned}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа выражений (4.38) и (4.39) и используя связь между функцией распределения и потоком частиц, приходим соответственно к соотношениям

$$\begin{aligned}J_\pm(v, t) &= - \int_0^\infty \int_0^t \sqrt{\frac{v}{v'}} \exp\left(\frac{t' - t}{2\tau}\right) I_1\left[\frac{(t - t') \sqrt{vv'}}{\tau(v + v')}\right] \times \\ &\times \frac{\delta(v - v' \mp 2u_{1,2})}{t - t'} J_\mp(v', t') dt' dv'.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Отсюда для величин $G_{1,2}(v, t; v', t')$, определяющих вероятности перехода $t', v' \rightarrow t, v$ за полуцикл, так что входящая в соотношение (4.1) плотность вероятности является их сверткой

$$G(v, t; v', t') = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty G_1(v, t; v'', t'') G_2(v'', t''; v', t') dt'' dv'', \quad (4.41)$$

легко получить выражения

$$\begin{aligned}G_{1,2}(v, t; v', t') &= \sqrt{\frac{v}{v'}} \exp\left(\frac{t' - t}{2\tau}\right) I_1\left[\frac{(t - t') \sqrt{vv'}}{\tau(v + v')}\right] \times \\ &\times \frac{\delta(v - v' \mp 2u_{1,2})}{t - t'} \theta(t - t').\end{aligned}\quad (4.42)$$

Нетрудно установить, что интегрирование выражения (4.42) по времени

$$G_{1,2}(v, v') = \int_{-\infty}^\infty G_{1,2}(v, t; v', t') dt \quad (4.43)$$

дает вероятности перехода (4.28) и (4.29) стационарной задачи ускорения.

Использование соотношений (4.1), (4.41) и выражения (4.42) позволяет вычислить параметры, характеризующие развитие процесса ускорения во времени. Так, среднее время, затрачиваемое

частицей на совершение k циклов, можно рассчитать по формуле

$$t_k = \int_0^{\infty} J_k(t) t dt \int_0^{\infty} J_k(t) dt,$$

если начальный поток задать в виде $J_0(t) = J_0 \delta(t)$, где $J_k(t) = \int_0^{\infty} J_k(v, t) dv$ — суммарная по спектру плотность потока частиц через ударный фронт. Выражения (4.1), (4.41) и (4.42) дают рекуррентное соотношение

$$t_k = t_{k-1} + 2(\tau v/u_1 + \tau v/u_2), \quad (4.44)$$

из которого следует формула для времени, затрачиваемого частицами на совершение k циклов:

$$t_k = 2k\tau(v/u_1 + v/u_2). \quad (4.45)$$

Поскольку за каждый цикл ускорения величина скорости частиц возрастает на $\Delta v = 2\Delta u$, для среднего темпа увеличения скорости частиц с учетом выражения (4.45) можно записать

$$\left\langle \frac{dv}{dt} \right\rangle \simeq \frac{2k\Delta u}{t_k} = \frac{\Delta u}{\tau v/u_1 + \tau v/u_2},$$

откуда вытекает выражение для характерного времени ускорения

$$\tau_a = v / \left\langle \frac{dv}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\Delta u} \left(\frac{u_1}{v} + \frac{u_2}{v} \right), \quad (4.46)$$

где учтено, что время между рассеяниями τ и коэффициент диффузии τv^2 в областях перед и за фронтом могут иметь разные значения. Сравнение этого выражения с выражением (2.43) для времени ускорения, отвечающего диффузионному подходу, показывает, что они различаются множителем 3. Происхождение этого отличия нетрудно установить. Одномерный характер движения в рассматриваемой модели, как показывает соотношение (4.24), обуславливает завышение темпа адиабатического изменения энергии частиц, а значит, и заниженное в три раза значение характерного времени ускорения по сравнению с реальным случаем трехмерных перемещений частиц.

Таким образом, совпадение всех основных особенностей регулярного ускорения, полученных на основе двух подходов — кинетического и диффузионного, может служить дополнительным аргументом, свидетельствующим об адекватности диффузионного способа описания процесса регулярного ускорения.

§ 16. ДИФфуЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МЕТОДЕ ПОКОЛЕНИЙ

Помимо детализации теории регулярного ускорения метод поколений может использоваться в качестве способа получения решения диффузионного уравнения переноса. Представляет интерес разра-

ботка такого, достаточно общего метода решения, поскольку, за исключением одиночных случаев, при исследовании процесса регулярного ускорения в тех или иных условиях приходится прибегать к численному решению уравнения переноса, что зачастую является весьма трудоемкой задачей.

Принципиальный момент при разработке метода поколений в рамках диффузионного подхода есть само определение поколения.

16.1. Понятие поколения при использовании диффузионного приближения. При переходе к диффузионному способу описания метод поколений в той форме, в какой он использовался в § 15, становится непригодным. Основная трудность заключается в следующем. Реализация метода поколений, как было показано, состоит в нахождении связи между потоками входящих и выходящих частиц в области за и перед ударным фронтом.

Необходимость решения этой проблемы приводит к краевой задаче, в которой в качестве граничного условия на ударном фронте фигурирует поток входящих в рассматриваемую область частиц. При этом границу области (т. е. поверхность ударного фронта) можно рассматривать как поглощающую поверхность. Физически это означает, что рассматривается задача о распространении частиц в полупространстве, заполненном движущейся рассеивающей средой, граничащей с вакуумом. Разумеется, в случае ударной волны, это всего лишь искусственный прием, используемый для нахождения основной характеристики в методе поколений — вероятности перехода G .

Наличие в системе поглощающей поверхности в рамках диффузионного приближения влечет за собой граничное условие обращения в ноль изотропной части функции распределения на этой поверхности. Поскольку направленный поток совпадает с полным потоком и всегда направлен наружу из рассматриваемой области, становится невозможной постановка необходимого граничного условия на поглощающей поверхности — задание величины потока входящих частиц.

Указанную трудность можно обойти, задавая темп поступления частиц в систему в качестве источника, расположенного на некотором расстоянии от границы [132, 133], которое можно определить формальным путем, решая следующую простую задачу.

Пусть в полупространстве — в области за ($x < 0$) или перед ($x > 0$) фронтом плоской идеальной ударной волны — на некотором расстоянии l от поглощающей поверхности ($x = 0$) помещен источник

$$Q_{1,2} = \pm \frac{J_{\pm}}{4\pi p^2} \delta(x \mp l), \quad (4.47)$$

который инжектирует $|J_{\pm}|$ частиц в единицу времени на единицу поверхности фронта. Вычислим на основе диффузионного уравнения переноса (2.2) стационарный поток частиц, выходящих из рассматриваемой области через поверхность фронта, на котором

нужно задать граничное условие

$$f(x=0, p) = 0. \quad (4.48)$$

Решение уравнения переноса

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - u \frac{\partial f}{\partial x} + Q \quad (4.49)$$

в непосредственной близости от ударного фронта ($|x| \leq l$) для области перед и за ударным фронтом соответственно с учетом стационарных условий (4.47) и (4.48) имеет вид

$$f_1 = -\frac{J_-}{4\pi p^2 u_1} [1 - \exp(xu_1/\kappa_1)],$$

$$f_2 = \frac{J_+}{4\pi p^2 u_2} \exp\left(-\frac{lu_2}{\kappa_2}\right) \left[\exp\left(\frac{xu_2}{\kappa_2}\right) - 1 \right].$$

Пользуясь этими выражениями, нетрудно определить поток выходящих через фронт частиц, который, как отмечалось, совпадает с направленным потоком:

$$J_{\pm}(p) = -4\pi p^2 \kappa_{1,2} \frac{\partial f_{1,2}(x=0, p)}{\partial x}. \quad (4.50)$$

Для области 1 это дает

$$J_+ = -J_- \quad (4.51)$$

и для области 2 —

$$J_- = -J_+ \exp(-lu_2/\kappa_2). \quad (4.52)$$

Из соотношения (4.52) вытекает, что вероятность возвращения частиц из области за фронтом $P_2 = \exp(-lu_2/\kappa_2)$ зависит от положения источника Q . Приравнявая это значение P_2 полученному ранее ($P_2 = 1 - 4u_2/v$) (см. § 3), получаем расстояние

$$l = 4\kappa_2/v = 4\lambda_2/3, \quad (4.53)$$

на которое необходимо поместить источник частиц, эквивалентный потоку входящих частиц. Заметим также, что согласно соотношению (4.51) для области 1 вероятность возвращения частиц $P_1 = 1$, как и требуется.

Второй особенностью, связанной с использованием метода поколений в рамках диффузионного подхода, является изменение величины импульса частиц вследствие пересечения ими ударного фронта. При диффузионном способе описания импульс частиц согласно (2.4) меняется только на самом ударном фронте. Распространение же частиц перед и за ударным фронтом не сопровождается изменением их энергии.

При использовании метода поколений ударный фронт из рассмотрения выпадает. Поэтому для определения плотности вероятности $G_{1,2}(p, p')$, описывающей переходы $p' \rightarrow p$ при распространении частицы в соответствующей области пространства, необходимо в

явном виде учесть, что за каждый такой полуцикл импульс частиц в среднем изменяется согласно (1.13) на величину

$$\Delta p_{1,2} = \pm (4/3) (u_{1,2}/v) p. \quad (4.54)$$

Сразу отметим, что в реальном случае изменение импульса частицы за полуцикл зависит от направлений входа и выхода частицы (см. (1.12)). Приписывание каждой частице средней величины приращения $\langle \Delta p \rangle$, как было показано в § 15, дает вместо непрерывного спектр частиц, представляемый суммой дельтообразных слагаемых. Поэтому переход к истинному спектру требует дополнительного усреднения спектра по интервалу $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$.

Учитывая изложенное, нетрудно получить выражения для плотностей вероятности:

$$G_1(p, p') = \delta(p - p' - \Delta p_1), \quad (4.55)$$

$$G_2(p, p') = (1 - 4u_2/v) \delta(p - p' - \Delta p_2). \quad (4.56)$$

Использование соотношений (4.5), (4.25), (4.55), (4.56) и выполнение усреднения по импульсу в пределах интервала Δp позволяют найти спектр частиц

$$f(x=0, p) = \frac{N}{4\pi p_0^3} q \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-q} \theta(p - p_0), \quad q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1},$$

если на ударном фронте в процесс ускорения инжектируется поток моноэнергетических частиц $J_0(p) = u_1 N_0 \delta(p - p_0)$. Нетрудно убедиться в том, что это выражение полностью совпадает с формальным решением (2.31) диффузионного уравнения.

Необходимо отметить, что непосредственным результатом метода поколений является получение спектра частиц на ударном фронте. При необходимости, чтобы найти распределение частиц в пространстве, надо решить диффузионное уравнение переноса по обе стороны ударного фронта, что, как правило, — задача более простая.

16.2. Развитие процесса ускорения во времени. Чтобы убедиться в том, что сформулированный метод поколений в диффузионном приближении правильно описывает развитие процесса регулярного ускорения во времени, достаточно решить уравнение переноса (4.49) с граничным условием (4.48) в каждой из областей 1 и 2 с источником (4.47), в котором поток входящих частиц $J_{\pm}(p, t)$ является функцией времени.

Подняв в уравнении (4.49) преобразование Лапласа по времени

$$\bar{s}f = \kappa \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} - u \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \pm \frac{\bar{J}_{\pm}}{4\pi p^2} \delta(x \mp l) \quad (4.57)$$

и решая его, приходим к выражению для лаплас-образа функции распределения в окрестности ударного фронта ($|x| < l$):

$$\bar{f}_{1,2}(x, p, s) = \mp \frac{\bar{J}_{\mp}(p, s)}{4\pi p^3 \kappa_{1,2} (a_{1,2} - b_{1,2})} (e^{a_{1,2}x} - e^{b_{1,2}x}) e^{-b_{1,2}l}, \quad (4.58)$$

где

$$a_i = (-1)^i \frac{u_i}{2\kappa_i} - \sqrt{\left(\frac{u_i}{2\kappa_i}\right)^2 + \frac{s}{\kappa_i}},$$

$$b_i = (-1)^i \frac{u_i}{2\kappa_i} + \sqrt{\left(\frac{u_i}{2\kappa_i}\right)^2 + \frac{s}{\kappa_i}}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа и определяя с помощью найденного решения по формуле (4.50) поток выходящих частиц $J_{\pm}(p, s)$, с учетом соотношений (4.1) и (4.41) получим выражение для плотности вероятности

$$G_i(p, t; p', t') = \frac{2 \sqrt{\kappa_i} \delta(p - p' - \Delta p_i)}{v \sqrt{\pi (t - t')^3}} \theta(t - t') \times$$

$$\times \exp \left[-(-1)^i \frac{2u_i}{v} - \frac{u_i^2 (t - t')}{4\kappa_i} - \frac{4\kappa_i}{v^2 (t - t')} \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.59)$$

Задавая в явном виде поток инжектируемых на ударном фронте частиц $J_0(p, t)$ с помощью соотношений (4.1), (4.41) и (4.59), можно определить поток частиц каждого из последующих поколений $J_k(p, t)$. Особый интерес при этом представляет случай инжекции моноэнергичных частиц, начавшейся в момент $t = 0$. Напомним, что тогда, когда результат не зависит от того, в какую область пространства относительно ударного фронта инжектируются частицы, знаки « \pm » у потока J мы опускаем; при этом для определенности будем иметь дело с положительной величиной $J = J_+$. Возникающие при использовании рекуррентного соотношения интегралы наиболее просто вычислить, если коэффициенты диффузии в областях 1 и 2 связаны соотношением

$$\kappa_1/\kappa_2 = (u_1/u_2)^2 = \sigma^2.$$

В этом случае выражение для потока частиц k -го поколения имеет вид

$$J_k(p, t) = u_1 N_0 \frac{(\sigma + 1) k \delta(p - p_k)}{\sigma \sqrt{\pi} t_0} \times$$

$$\times \int_0^t \left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/2} \exp \left[\frac{2k(\sigma - 1)u_2}{v} - \frac{t_0}{t} \left(\frac{ku_2}{v}\right)^2 (\sigma + 1)^2 - \frac{t}{t_0} \right] dt, \quad (4.60)$$

где

$$t_0 = 4\kappa_i/u_i^2, \quad p_k = p_0 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\Delta u}{v_0} k\right). \quad (4.61)$$

Суммирование потоков частиц всех поколений и усреднение по интервалу $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$ позволяют определить спектр частиц на

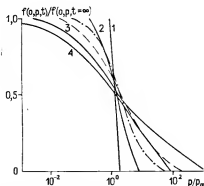


Рис. 4.1. Спектр частиц на фронте сильной ударной волны ($\sigma = 4$) для различных времен с момента инжекции.

Сплошные кривые отвечают не зависящим от импульса коэффициентам диффузии ($\alpha = 0$), связанным соотношением $\kappa_1/u_1^2 = \kappa_2/u_2^2$, в моменты $t/t_0 = 0, 1$ (1), 1 (2), 5 (3), 10 (4), штриховая — случаю $\alpha = 1/2$, а штрихпунктирная — $\alpha = 1$.

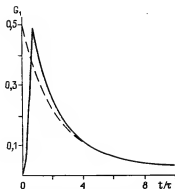


Рис. 4.2. Плотность вероятности возвращения частиц из области перед фронтом плоской ударной волны в зависимости от времени с момента инжекции.

Сплошная кривая отвечает кинетической модели, штриховая — диффузионному приближению.

ударном фронте в каждый момент времени $t > 0$:

$$f(x=0, p, t) = \frac{N_0}{8\pi p_0^3} q\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-q} \theta(p - p_0) \theta(t) \times \\ \times \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{t_0}} - \frac{3}{4} \frac{\sigma+1}{\sigma-1} \sqrt{\frac{t_0}{t}} \ln \frac{p}{p_0}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{p}{p_0}\right)^{3(\sigma+1)/(\sigma-1)} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{t_0}} + \frac{3}{4} \frac{\sigma+1}{\sigma-1} \sqrt{\frac{t_0}{t}} \ln \frac{p}{p_0}\right) \right] \right\}, \quad (4.62)$$

что совпадает с формальным решением (2.46) диффузионного уравнения [66, 83]. Эволюция спектра ускоренных частиц (4.62) во времени показана на рис. 4.1.

Представляет интерес сравнение результатов решения нестационарной задачи регулярного ускорения в рамках кинетического и диффузионного подходов. Поскольку кинетический подход реализован в § 15 в модели одномерных движений частиц, можно проделать такое сопоставление, если в выражение (4.59) подставить соответствующий одномерной модели коэффициент диффузии $\kappa = \nu^2$, заменить ν на 2ν и сравнить с выражением (4.42), отвечающим кинетическому подходу. Результаты такого сопоставления приведены на рис. 4.2, где изображена величина $G_1(t - t') =$

$= \int_0^\infty G_1(p, t; p', t') dp$, представляющая собой плотность вероятности возврата частицы из области перед ударным фронтом в момент

t , если она была инжектирована туда в момент времени t' . Как видно, для больших промежутков времени ($t - t' \gg \tau$) результаты двух расчетов совпадают, в чем можно непосредственно убедиться путем асимптотического разложения функции Бесселя в выражении (4.42). Существенное отличие наблюдается только для времени $t - t' \lesssim \tau$, что связано с непригодностью диффузионного способа описания на таких малых отрезках времени.

16.3. Метод моментов. Выражения для вероятностей перехода (4.59) получились простыми из-за специального выбора коэффициента диффузии частиц. В общем случае точные формулы очень громоздки. Однако можно сформулировать приближенный, достаточно простой и надежный способ описания, основанный на использовании свойств вероятностей перехода.

Чтобы понять, о чем идет речь, вычислим важные статистические характеристики пространственного движения частиц — среднее время, затрачиваемое ими на совершение k циклов, и соответствующую этой величине дисперсию, исходя из формул:

$$t_k = \int_0^{\infty} J_k(t) t dt \int_0^{\infty} J_k(t) dt, \quad (4.63)$$

$$d_k^2 = \int_0^{\infty} J_k(t) (t^2 - t_k^2) dt \int_0^{\infty} J_k(t) dt, \quad (4.64)$$

где $J_k(t) = \int_0^{\infty} J_k(p, t) dp$, $J_0(t) = J_0 \delta(t)$. Используя (4.1), (4.59), приходим к простым соотношениям:

$$J_k = (1 - 4u_2/v_k) J_{k-1}, \quad (4.65)$$

$$t_k = t_{k-1} + 4 \left[\frac{\kappa_1(p_k)}{v_k u_1} + \frac{\kappa_2(p_k)}{v_k u_2} \right], \quad (4.66)$$

$$d_k^2 = d_{k-1}^2 + 8 \left[\frac{\kappa_1^2(p_k)}{v_k u_1^3} + \frac{\kappa_2^2(p_k)}{v_k u_2^3} \right], \quad (4.67)$$

где величина импульса частиц k -го поколения определяется формулой (4.61). Многократное использование рекуррентных соотношений (4.66) и (4.67) позволяет получить окончательные выражения

$$t_k = \frac{3}{u_1 - u_2} \int_{p_0}^{p_k} \left[\frac{\kappa_1(p)}{u_1} + \frac{\kappa_2(p)}{u_2} \right] \frac{dp}{p}, \quad (4.68)$$

$$d_k^2 = \frac{6}{u_1 - u_2} \int_{p_0}^{p_k} \left[\frac{\kappa_1^2(p)}{u_1^3} + \frac{\kappa_2^2(p)}{u_2^3} \right] \frac{dp}{p}, \quad (4.69)$$

в которых суммирование заменено интегрированием. Это допустимо, если учесть, что приращение импульса частицы за каждый

цикл $\Delta p_k = (4/3) \Delta u p / v \ll p$ — относительно малая величина. Заметим, что выражения (4.68), (4.69) для среднего времени и дисперсии могут быть получены и другими способами [52, 86].

Функцию $J_k(t)/J_k$ можно рассматривать как плотность вероятности случайной величины t , представляющей собой время, необходимое частице для совершения k циклов ускорения. В свою очередь, время t является суммой k случайных величин — времен Δt_i ($i \leq k$), необходимых для совершения каждого из k циклов. Каждая из этих величин описывается одной и той же плотностью вероятности

$G(\Delta t = t - t') = \int_0^\infty G(p, t; p', t') dp$. Поэтому в силу предельной теоремы теории вероятности [134] при больших k величина

на $t = \sum_{i=0}^k \Delta t_i$ имеет нормальное распределение

$$J_k(t)/J_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_k^2}} \exp \left[-\frac{(t - t_k)^2}{2d_k^2} \right]. \quad (4.70)$$

Более подходящей для аппроксимации величины $J_k(t)$ является функция

$$J_k(t) = \frac{J_k}{\sqrt{2\pi d_k^2}} \left(\frac{t_k}{t} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{t_k^3}{d_k^2} - \frac{t_k t}{2d_k^2} - \frac{t^3}{2d_k^2} \right]. \quad (4.71)$$

Она дает те же значения первых двух моментов — математического ожидания t_k и дисперсии d_k , что и распределение (4.70), и асимптотически стремится к нему (нетрудно убедиться в том, что величины более старших моментов, даваемые распределением (4.71), отнесенным к величине d_k , стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$). Вместе с тем функция (4.71) имеет тот же вид, что и получающийся из выражения (4.60) в частном случае коэффициентов диффузии $\kappa_1/\kappa_2 = u_1^2/u_2^2$.

Суммируя плотности потоков частиц всех поколений $J_k(p, t) = J_k(t) \delta(p - p_k)$, можно определить истинный поток частиц через фронт $J(p, t) = \sum_k J_k(p, t)$ и найти тем самым функцию распределения частиц на ударном фронте $f = J/(\pi p^2 v)$. Если, как и при выводе выражений (4.68), (4.69), от суммирования по k перейти к интегрированию, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} f(x=0, p_k, t) &= \frac{N_0 q}{8\pi p_0^3} \left(\frac{p_k}{p_0} \right)^{-q} \theta(p_k - p_0) \theta(t) \times \\ &\times \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{t_k t}{2d_k^2}} - \sqrt{\frac{t_k^3}{2d_k^2 t}} \right) + e^{2t_k^2/d_k^2} \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{t_k^3}{2d_k^2 t}} + \sqrt{\frac{t_k t}{2d_k^2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

в котором величины t_k и d_k связаны с импульсом p_k соотношениями (4.68) и (4.69).

Для области импульсов, удовлетворяющих неравенству $t_k \ll t$, величина, стоящая в фигурных скобках выражения (4.72), близка к 2, а весь спектр совпадает со стационарным универсальным спектром $f \sim p_k^{-q}$. Отклонение от стационарного спектра становится заметным для импульсов, превышающих значение p_m , отвечающее равенству $t_m = t$.

Эта величина p_m , которая совпадает с введенной в гл. 2, имеет смысл максимального импульса спектра ускоренных частиц. Значение p_m разделяет область импульсов $p_0 \leq p \leq p_m(t)$, где спектр частиц близок к стационарному, от области $p > p_m$, где спектр становится более крутым при увеличении импульса p . Выражение (4.68) показывает, что максимальный импульс растет во времени в соответствии с уравнением $\frac{dp_m}{dt} = \frac{p_m}{\tau_a}$, где величина

$$\tau_a = \frac{3}{\Delta u} \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right) \quad (4.73)$$

— характерное время ускорения.

Характер трансформации спектра (4.72) со временем существенно определяется зависимостью коэффициента диффузии частиц от импульса. Для больших значений времени ($t \gg t_k$) выражение (4.72) существенно упрощается:

$$f(x=0, p, t) = \frac{N_0 q}{4\pi p_0^3} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \times \\ \times \theta(p_k - p_0) \theta(t) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{t_k^3}{2d_k^2 t}} - \sqrt{\frac{t_k t}{2d_k^2}} \right). \quad (4.74)$$

Если для определенности принять коэффициент диффузии частиц в форме $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 (p/p_0)^\alpha$, то, как следует из выражения (4.74), при не зависящем от импульса коэффициенте диффузии ($\alpha = 0$) характерная ширина области импульсов (§ 7), в пределах которой спектр ускоренных частиц отклоняется от стационарного, увеличивается со временем

$$\Delta p/p_m \simeq \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{(\sigma-1)(\sigma^3+1)}{\sigma(\sigma+1)^2} \ln p_m/p_0}.$$

Для растущего с импульсом коэффициента диффузии ($\alpha > 0$) ширина области спада $\Delta p/p_m$ начиная с момента времени $t/\tau_a \gg 1$ остается неизменной:

$$\frac{\Delta p}{p_m} \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{3\alpha} \frac{(\sigma-1)(\sigma^3+1)}{(\sigma+1)^2}}.$$

Отмеченные особенности эволюции спектра ускоренных частиц во времени ясно видны из рис. 4.1, где изображена функция рас-

пределения частиц на ударном фронте в зависимости от импульса для разных моментов времени и значений показателя $\alpha = 0$ и $1/2, 1$.

16.4. Учет конкурирующих процессов. Методом поколений можно описать процесс регулярного ускорения даже при наличии конкурирующих процессов изменения энергии частиц. Рассмотрим результаты этого метода на примере, когда в качестве такого процесса выступает процесс потерь энергии частицами. При этом для определенности примем, что характерное время потерь $\tau = -p/\langle dp/dt \rangle$ уменьшается с ростом импульса (температура потерь возрастает) по закону

$$\tau = \tau_0 (p_0/p). \quad (4.75)$$

Такой вид, в частности, имеет характерное время потерь энергии на синхротронное излучение для релятивистских электронов.

За промежуток времени $t - t'$ импульс частицы в соответствии с (4.75) уменьшается на величину

$$p - p' = - \frac{pp'(t - t')}{p_0 \tau_0}. \quad (4.76)$$

Исходя из соотношения (4.76), учет энергетических потерь частиц в окрестности фронта плоской идеальной ударной волны можно осуществить, отталкиваясь от плотностей вероятности $G_{1,2}(p, t; p', t')$, заданных выражением (4.59). Чтобы перейти от этих величин к плотностям вероятности $G_{1,2}(p, p')$, описывающим стационарный процесс ускорения с учетом энергетических потерь, примем во внимание, что за время $t - t'$ пребывания частицы в области перед или за ударным фронтом ее импульс изменяется на величину, определяемую формулой (4.76):

$$G_{1,2}(p, p') = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dp'' G_{1,2}(p'', t; p', t') \frac{p''}{p} \delta \left[p - p'' + \frac{pp''(t - t')}{p_0 \tau_0} \right], \quad (4.77)$$

Как видно, за каждый полуцикл по сравнению с обычным переходом $p' \rightarrow p'' = p' + \Delta p$, связанным с ускорением частицы, осуществляется дополнительный переход $p'' \rightarrow p = p'' - pp''(t - t')/(p_0 \tau_0)$, обусловленный энергетическими потерями. Фактор p''/p возникает вследствие необходимого условия, чтобы полная вероятность перехода $p'' \rightarrow p$ была равна единице. Заметим, что соотношение (4.77) справедливо только в том случае, если изменение энергии частицы за счет потерь не сказывается на скорости ее распространения. Другими словами, скорость частицы v и коэффициент диффузии χ не должны зависеть от величины импульса, что будем считать выполненным.

Подставляя в соотношение (4.77) выражение (4.59) для плотности вероятности $G_{1,2}(p, t; p', t')$, получим

$$G_i(p, p') = \frac{2}{v} \sqrt{\frac{\kappa_i (p' + \Delta p_i)^3}{\pi (p' + \Delta p_i - p)^3 p_0 \tau_0}} \theta(p' + \Delta p_i - p) \times \\ \times \exp \left[-(-1)^i \frac{2u}{v} - \frac{(p' + \Delta p_i - p) u^2 \tau_0 p_0}{4 \kappa_i p (p' + \Delta p_i)} - \frac{4 \kappa_i p (p' + \Delta p_i)}{v^2 (p' + \Delta p_i - p) \tau_0 p_0} \right], \quad (4.78)$$

где величины приращений импульса $\Delta p_{1,2}$ за полуцикл даются выражением (4.54).

Из выражения (4.78) видно, что величина $y = p_0/p$ имеет такое же распределение, как время t в рассмотренной ранее нестационарной задаче ускорения. Поэтому, чтобы воспользоваться для нахождения спектра частиц на ударном фронте методом моментов, вычислим математическое ожидание y_k и дисперсию d_k^2 отвечающих k -му циклу ускорения при инжекции моноэнергетического потока частиц

$$J(p, t) = J_0 \delta(p - p_0). \quad (4.79)$$

Используя рекуррентное соотношение (4.5) для плотностей потоков $J_k(p)$ и выражение (4.78) для плотности вероятности перехода, имеем

$$y_k = y_{k-1} \exp \left(-\frac{4\Delta u}{3v} \right) + \frac{4\kappa_1}{vu_1\tau_0} + \frac{4\kappa_2}{vu_2\tau_0} \exp \left(-\frac{4u_1}{3v} \right), \quad (4.80)$$

$$d_k^2 = d_{k-1}^2 \exp \left(-\frac{8\Delta u}{3v} \right) + \frac{8\kappa_1^2}{vu_1^3\tau_0^2} + \frac{8\kappa_2^2}{vu_2^3\tau_0^2} \exp \left(-\frac{8u_1}{3v} \right). \quad (4.81)$$

Поскольку для нулевого поколения, описываемого выражением (4.79): $y_0 = 1$, $d_0^2 = 0$, использование рекуррентных соотношений (4.80) и (4.81) дает окончательные выражения для математического ожидания и дисперсии величины y :

$$y_k = \exp \left(-\frac{4k\Delta u}{3v} \right) + \left(\frac{3\kappa_1}{\Delta uu_1\tau_0} + \frac{3\kappa_2}{\Delta uu_2\tau_0} \right) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{4(k+1)\Delta u}{3v} \right] \right\}, \quad (4.82)$$

$$d_k^2 = \left(\frac{3\kappa_1^2}{\Delta uu_1^3\tau_0^2} + \frac{3\kappa_2^2}{\Delta uu_2^3\tau_0^2} \right) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{8\Delta u(k+1)}{3v} \right] \right\}. \quad (4.83)$$

Первый член в правой части выражения (4.82) описывает увеличение импульса за счет регулярного ускорения, второй — уменьшение за счет энергетических потерь. Дисперсия величины y , как видно из выражения (4.83), вызвана наличием энергетических потерь. Поэтому в качестве функции, аппроксимирующей поток ча-

стиц k -го поколения, можно принять

$$J_k(y) = \frac{J_0}{\sqrt{2\pi d_k^2}} \left(\frac{y_k - y}{y - y_{0k}} \right)^{3/2} \theta(y - y_{0k}) \exp \left[-\frac{4ku_2}{v} + \frac{(y_k - y_{0k})^2}{d_k^2} - \frac{(y_k - y_{0k})(y - y_k)}{2d_k^2} - \frac{(y_k - y_{0k})^3}{2d_k^2(y - y_{0k})} \right], \quad (4.84)$$

где величина $y_{0k} = \exp(-4k\Delta u/3v)$ обусловлена только процессом ускорения.

Учитывая связь $J_k(y)dy = J_k(p)dp$, суммируя потоки всех поколений, переходя при этом к интегрированию, можно получить следующее выражение для функции распределения частиц на ударном фронте:

$$f(x=0, p) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} q \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-4} \sqrt{\frac{y_m^3}{2\pi d_m^2}} \int_0^{p_0/p} \left(\frac{p_0}{p} - y \right)^{\frac{4-\sigma}{\sigma-1}} \frac{1 - p_0/p + y}{y^{3/2} \sqrt{1 + p_0/p - y}} \times \\ \times \exp \left[\frac{y_m^3}{d_m^2} \frac{1 - p_0/p + y}{1 + p_0/p - y} - \frac{y_m}{2d_m^2} \frac{y}{1 + p_0/p - y} - \frac{y_m^3 (1 - p_0/p + y)^2}{2d_m^2 y (1 + p_0/p - y)} \right] dy, \quad (4.85)$$

где $q = 3\sigma/(\sigma - 1)$, $\sigma = u_1/u_2$, а

$$y_m \equiv \frac{p_0}{p_m} = \frac{3\kappa_1}{\Delta u u_1 \tau_0} + \frac{3\kappa_2}{\Delta u u_2 \tau_0}, \\ d_m^2 = \frac{3\kappa_1^2}{\Delta u u_1^3 \tau_0^2} + \frac{3\kappa_2^2}{\Delta u u_2^3 \tau_0^2}$$

— предельные значения величины y_k и дисперсии d_k^2 , получаемые соответственно из выражений (4.82) и (4.83) при $k \rightarrow \infty$. Величина $p_m = p_0/y_m$ имеет смысл максимального импульса частиц. Нетрудно видеть, что величина p_m отвечает условию равенства темпов регулярного ускорения и энергетических потерь: $\tau_a = \tau(p_m)$.

При равной нулю дисперсии ($d_m = 0$) функция распределения, как показывает выражение (4.85), обрывается в точке $p = p_m$:

$$f(x=0, p) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0) \theta(p_m - p).$$

Если дисперсия d_m не равна нулю, то укрупнение спектра (4.85) по отношению к универсальному $f \sim p^{-q}$ осуществляется в пределах области импульсов с характерным размером $\Delta p = p_0 d_m$.

В частном случае, когда коэффициенты диффузии частиц по обе стороны ударного фронта связаны соотношением $\kappa_1/u_1^2 = \kappa_2/u_2^2$, функция распределения (4.85) полностью определяется значением параметра p_m , поскольку при этом $d_m^2 = (p_0/p_m)^2(\sigma - 1)/3$. В качестве примера на рис. 4.3 представлен спектр частиц на фронте

$f(p, r)$, отн. ед.

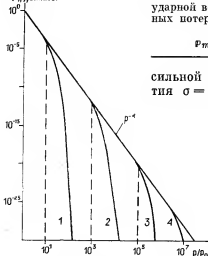


Рис. 4.3. Спектр электронов, ускоренных сильной ударной волной ($\sigma = 4$), при наличии синхротронных потерь энергии для значений импульса обреза:

$$p_m/p_0 = 10 \ (1), 10^3 \ (2), 10^5 \ (3), 10^7 \ (4).$$

сильной ударной волны со степенью сжатия $\sigma = 4$, отвечающий разным значениям максимального импульса p_m . Видно, что при увеличении импульса в районе точки p_m спектр резко укручается, что является следствием значительного превышения в данной области темпа энергетических потерь τ^{-1} по сравнению с темпом ускорения τ_a^{-1} .

16.5. Регулярное ускорение частиц на фронте стационарной сферической ударной волны. Переход к ударным волнам конечных

размеров не требует сколь-нибудь существенного видоизменения метода поколений при описании процесса регулярного ускорения. Проиллюстрируем возможности этого метода на примере стационарной сферически-симметричной ударной волны, который был рассмотрен в § 11.

Как и прежде, поле скоростей среды в ударной волне и коэффициент диффузии частиц примем соответственно в виде

$$u(r) = \begin{cases} u_1, & r < R, \\ u_2 (R/r)^2, & r > R; \end{cases} \quad (4.86)$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 (r/R), & r < R, \\ \kappa_2 (r/R), & r > R. \end{cases} \quad (4.87)$$

Для определения вероятностей перехода $G_{1,2}(p, p')$ необходимо решить уравнение переноса

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right) - u \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \frac{\partial f}{\partial p} + Q = 0 \quad (4.88)$$

с граничным условием

$$f(R, p) = 0 \quad (4.89)$$

и источником

$$Q_{1,2} = \mp \frac{J_{\mp}(p)}{4\pi p^2} \left(\frac{R}{R_{1,2}} \right)^2 \delta(r - R_{1,2}). \quad (4.90)$$

В выражении (4.90) верхние знаки отвечают области 1 ($r < R$), нижние — области 2 ($r > R$); J_{\mp} — плотность потока частиц через ударный фронт, поступающих в области 1 и 2 соответственно. Величина

$$R_{1,2} = R \mp 4\kappa_{1,2}(R, p)/v \quad (4.91)$$

описывает положение источника частиц, расположенного, как и в случае плоской волны, на расстоянии $l = (4/3)\lambda$. Это оправдано, если принять во внимание, что пробег до рассеяния λ намного меньше размера ударной волны R даже для частиц с предельно большими импульсами $p \sim p_m$, поскольку для всего спектра эффективно ускоряемых ударной волной частиц выполнено условие $\kappa_{1,2} \ll Ru_{1,2}$, которое с учетом соотношения $v \gg u_{1,2}$ для величины пробега означает $\lambda_{1,2} \ll R$.

Множитель $(R/R_{1,2})^2$ в выражении (4.90) для источника частиц отражает сохранение числа частиц при их распространении от ударного фронта ($r = R$) до точки инжекции ($r = R_{1,2}$).

Принимая поток инжектируемых частиц моноэнергетическим

$$J_{\pm}(p) = J_{\mp} \delta(p - p_0), \quad (4.92)$$

используя, как и в § 13, интегральное преобразование Фурье, можно получить решение уравнения переноса (4.88) для внутренней области с учетом условий (4.86), (4.87), (4.89) и (4.90):

$$f_1(r, p) = \frac{J_-}{16\pi u_1 p_0^3} \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \left(\frac{r}{R_1}\right)^{g_1/2-1} \frac{3}{\sqrt{\pi\eta}} \left\{ \exp \left[-\left(1 - \frac{g_1}{2}\right)^2 \eta - \left(\ln \frac{R}{r} - \ln \frac{R}{R_1}\right)^2 / 4\eta \right] - \exp \left[-\left(1 - \frac{g_1}{2}\right)^2 \eta - \left(\ln \frac{R}{r} + \ln \frac{R}{R_1}\right)^2 / 4\eta \right] \right\}, \quad (4.93)$$

где $\eta = (3/2g_1) \ln(p_0/p)$.

Как и в случае плоской волны, для определения плотности вероятности перехода $p' \rightarrow p$ за полуцикл необходимо вычислить плотность потока выходящих из области 1 частиц

$$J_+(p) = -4\pi p^2 \kappa_1(R, p) \frac{\partial f_1(R, p)}{\partial r},$$

а также учесть изменение импульса частиц за полуцикл на величину $\Delta p_1 = (4/3)pu_1/v$, что можно сделать, если в выражении (4.92) в качестве импульса инжектированных частиц принять $p_0 = p' + \Delta p_1$, где p' — импульс частиц, поступающих в область $r < R$. В итоге получим следующее выражение для плотности вероятности за первый полуцикл ускорения:

$$G_1(p, p') = \frac{3u_1}{\sqrt{\pi} p_0 v g_1^2 \eta^{3/2}} \left(1 + \frac{4u_1}{g_1 v}\right)^{g_1/2+1} \times \\ \times \exp \left[-\left(1 + g_1/3 + g_1^2/4\right) \eta - \frac{4u_1^2}{v^2 g_1^2 \eta} \right] \theta(p_0 - p), \quad (4.94)$$

если ограничиться старшими членами в разложении по малому параметру κ_1/vR .

Нетрудно установить, что с увеличением параметра модуляции ($g_1 \rightarrow \infty$) формула (4.94) переходит в выражение (4.55) для плоской ударной волны. Конечные значения параметра g_1 в выражении

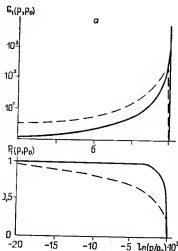


Рис. 4.4. Плотность вероятности (а) и вероятность (б) возвращения частиц из внутренней области ($r < R$), ограниченной стоячей сферической ударной волной, в зависимости от импульса частиц.

Сплошные кривые отвечают случаю сильной ($g_1 = 10$), штриховые — слабой ($g_1 = 1$) модуляции.

но, что характерная ширина области импульсов, в пределах которой вероятность $G_1(p, p')$ существенно отлична от нуля, растет при уменьшении g_1 . На этом же рисунке для наглядности изображена величина

$$P_1(p, p_0) = \int_p^{p_0} G_1(p, p_0) dp$$

— вероятность того, что частицы, инжектированные в область 1 с импульсом p_0 , выйдут оттуда с импульсом, лежащим в пределах $p - p_0$.

Во внешней области ($r > R$) уравнение переноса (4.88) решается без труда:

$$f_2(r, p) = \frac{J_+}{4\pi p^2 u_2} \frac{\left[\exp\left(-\frac{g_2}{2} \frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{g_2}{2}\right) \right]}{1 - \exp(-g_2/2)} \left[\exp\left(\frac{g_2}{2} \frac{R^2}{r^2}\right) - 1 \right], \quad (4.95)$$

что дает величину плотности потока выходящих частиц

$$J_-(p) = -J_+(p) \frac{\exp\left[\frac{g_2}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) - \exp\left(-\frac{g_2}{2}\right)\right]}{1 - \exp(-g_2/2)}, \quad (4.96)$$

где $g_2 = Ru_2/\kappa_2$.

Учет изменения импульса частиц на величину $\Delta p_2 = -(4/3) \times \times ru_2/v$ приводит к выражению для плотности вероятности перехо-

да за второй полуцикл ускорения:

$$G_2(p, p') = \delta(p - p' - \Delta p_2) \left\{ \exp \left[\frac{g_2}{2} \left(\frac{R^2}{R_2^2} - 1 \right) \right] - \exp \left(-\frac{g_2}{2} \right) \right\} \left[1 - \exp(-g_2/2) \right], \quad (4.97)$$

При больших значениях параметра модуляции $g_2 \gg 1$ это выражение мало отличается от плосковолнового аналога (4.56).

Интегрирование плотности вероятности $G_2(p, p')$ по импульсу p дает вероятность возвращения частиц из области $r > R$:

$$P_2 = \int_0^\infty G_2(p, p') dp = \left\{ \exp \left[\frac{g_2}{2} \left(\frac{R^2}{R_2^2} - 1 \right) \right] - \exp \left(-\frac{g_2}{2} \right) \right\} \left[1 - \exp \left(-\frac{g_2}{2} \right) \right]. \quad (4.98)$$

При больших значениях g_2 вероятность P_2 такая же, как и в плосковолновом случае: $P_2 \simeq 1 - (R_2 - R)u_2/\kappa_2 = 1 - 4u_2/v$. В противоположном случае малых значений параметра модуляции ($g_2 \ll 1$) вероятность возвращения близка к значению $P_2 = R^2/R_2^2$. Хотя величина P_2 по-прежнему может быть близка к единице ($P_2 \simeq 1 - 8\kappa_2/(vR)$ при $\kappa_2/(vR) \ll 1$), наиболее существенно следующее обстоятельство: вероятность того, что частица не вернется к фронту $1 - P_2 = 8\kappa_2/(vR)$, оказывается намного выше, чем в плосковолновом случае — $8\kappa_2/(vR) = 8u_2/(vg_2) \gg 4u_2/v$. Поскольку именно величина $1 - P_2$ определяет в конечном итоге характер спектра ускоренных частиц (см. § 3), при уменьшении параметра модуляции спектр ускоренных частиц будет становиться все более мягким, что свидетельствует о снижении эффективности процесса ускорения.

Используя выражения (4.94) и (4.97) для плотностей вероятности перехода, а также соотношения (4.5) и (4.25), можно определить спектр ускоренных частиц на ударном фронте. Для этого предварительно несколько упростим выражение (4.97):

$$G_2(p, p') = \left[1 - \frac{4u_2/v}{1 - \exp(-g_2/2)} \right] \delta(p - p' - \Delta p_2), \quad (4.99)$$

считая, что параметр u_2/v достаточно мал ($g_2 u_2/v \ll 1$). Задавая начальный поток инжектированных частиц моноэнергетическим $J_0(p) = u_1 N_0 \delta(p - p_0)$ и используя рекуррентное соотношение (4.5), можно получить выражение для потока частиц k -го поколения:

$$J_k(p) = u_1 N_0 \frac{ku_1}{vp_0} \sqrt{\frac{8}{3\pi g_1}} \left[\frac{4k(u_1 - u_2)}{3v} - \ln \frac{p}{p_0} \right]^{-3/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{4ku_2}{v} \left[\frac{\sigma}{g_1} \left(1 + \frac{g_1}{2} \right) - \frac{\sigma - 1}{3} - \frac{1}{1 - \exp(-g_2/2)} \right] - \right.$$

$$-\frac{3}{2g_1} \left(1 + \frac{g_1}{3} + \frac{g_1^2}{4} \right) \left[\left(\frac{4ku_1(\sigma-1)}{3\sigma v} - \ln \frac{p}{p_0} \right) - \right. \\ \left. - \frac{8}{3g_1} \frac{u_1^2 k^2}{v^2 \left(\frac{4ku_1(\sigma-1)}{3\sigma v} - \ln \frac{p}{p_0} \right)} \right] \theta \left[\frac{4ku_2(\sigma-1)}{3v} - \ln \frac{p}{p_0} \right]. \quad (4.100)$$

Переход к функции распределения частиц на ударном фронте $f(R, p) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k(p)/(\pi p^2 v)$ наиболее удобно выполнить, заменив суммирование по k интегрированием, учитывая условие $u/v \ll 1$, что дает

$$f(R, p) = \frac{3\sigma N_0}{8\pi p_0^3(\sigma-1)} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \operatorname{erfc} \left[\frac{\sigma}{\sigma-1} \sqrt{\frac{3 \ln \frac{p}{p_0}}{2g_1}} (\sqrt{a} + 1) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q + \frac{6}{g_1} \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right)^2 \sqrt{a}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\sigma}{\sigma-1} \sqrt{\frac{3 \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)}{2g_1}} (\sqrt{a} - 1) \right] \right\} \times \\ \times \theta(p_0 - p) + \frac{3\sigma N_0}{4\pi p_0^3(\sigma-1)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0), \quad (4.101)$$

где

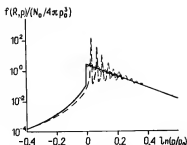
$$a = 1 + \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right)^2 \left(1 + \frac{g_1}{3} + \frac{g_1^2}{4} \right) - \frac{2(\sigma-1)g_1}{\sigma^2} \left[\frac{\sigma}{g_1} \left(1 + \frac{g_1}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sigma-1}{3} - \frac{1}{1 - \exp(-g_2/2)} \right], \\ q = 2 + \frac{3}{2g_1} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right)^2 (1 + \sqrt{a})^2 - 1 - \frac{g_1}{3} - \frac{g_1^2}{4} \right].$$

Нетрудно убедиться в том, что это выражение совпадает с тем, которое дает формальное решение (3.20) уравнения переноса.

Выполнение численного суммирования по k при конечном значении u_2/v приводит к нерегулярности в поведении функции распределения $f(R, p)$, особенно заметной вблизи импульса инжекции p_0 (рис. 4.5). Эта нерегулярность, как уже неоднократно отмечалось, является следствием принятого условия, что приращение импульса каждой частицы за один цикл пересечения ударного фронта (если не учитывать адиабатического замедления) составляет $\Delta p = \langle \Delta p \rangle = (4/3)p\Delta u/v$ независимо от направлений, под которыми она пересекала фронт. Указанная погрешность метода поколений может быть существенно снижена, если произвести усреднение спектра, полученного путем численного суммирования поколений в каждой точке p , по интервалу импульсов $\Delta p = \langle \Delta p \rangle$, что подтверждают результаты, приведенные на рис. 4.5.

Рис. 4.5. Спектр частиц, ускоренных стоячей сферической ударной волной со степенью сжатия $\sigma = 4$ для случая сильной модуляции ($g_1 = g_2 = 10$).

Сплошная кривая отвечает точному решению диффузионного уравнения переноса, штриховая — численной сумме поколений при $4\alpha_2/v = 0,01$, точки — результат усреднения суммы в пределах интервала $\Delta p = (4/3)\Delta p/v$.



Таким образом, использование метода поколений позволяет достигнуть наиболее ясной физической интерпретации основных особенностей процесса регулярного ускорения. Помимо этого, он может служить одним из практических способов получения решения разнообразных задач в рамках диффузионного подхода.

Глава 5

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ

Жесткий спектр частиц, ускоренных сильной ударной волной, является причиной того, что рассчитанная в линейном приближении энергии ускоренных частиц

$$E = 4\pi \int_{p_0}^{p_m} \varepsilon p^2 f dp,$$

которая является растущей функцией импульса обрезания p_m , может формально превысить полную внутреннюю энергию плазмы. Этому способствует тот факт, что ускоренные частицы, имеющие в области перед ударным фронтом анизотропное угловое распределение, могут генерировать магнитогидродинамические волны, что повышает рассеивающие свойства среды и ведет в конечном счете к росту максимального импульса p_m . Следовательно, теория процесса регулярного ускорения должна быть существенно нелинейной. Она должна включать в себя решение задачи о самосогласованной плазменной турбулентности, а также учет модификации структуры ударной волны давлением ускоренных частиц, которая, в свою очередь, влияет на сам процесс ускорения. Не менее важным является также вопрос о темпе инжекции частиц плазмы в режим ускорения.

Полное последовательное решение перечисленных задач в силу их сложности в настоящее время далеко от завершения. Достигнутые в данном направлении успехи связаны прежде всего с

развитием моделей, которые тот или иной аспект данной нелинейной проблемы учитывают на полуфеноменологическом уровне. Тем не менее в рамках указанных моделей удается получить ряд важных результатов, имеющих фундаментальное значение.

§ 17. ГЕНЕРАЦИЯ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ УДАРНОГО ФРОНТА

Важным аспектом нелинейного взаимодействия космических лучей в процессе их регулярного ускорения является генерация ими плазменной турбулентности. Причина тому заключается в неустойчивости анизотропного распределения космических лучей в области перед ударным фронтом. Генерация плазменной турбулентности в результате развития неустойчивости оказывает существенное влияние на процесс ускорения, поскольку уровень турбулентности задает рассеивающие свойства среды и тем самым определяет эффективность ускорения.

Одним из основных типов турбулентности, возбуждение которой может осуществляться в области ударного фронта, являются альфвеновские волны. С одной стороны, альфвеновская турбулентность достаточно эффективно рассеивает быстрые частицы, а с другой — альфвеновские волны, распространяющиеся вдоль регулярного магнитного поля, представляют собой наименее затухающую моду среди всех других типов магнитогидродинамических волн. Поэтому альфвеновская турбулентность играет важную роль во многих задачах физики космических лучей [135—141]. Интересно также отметить, что генерация альфвеновских волн является одним из немногих примеров, когда исследование задачи регулярного ускорения с учетом нелинейных эффектов удается достаточно последовательно довести до конца.

17.1 Инкремент нарастания амплитуды альфвеновских волн. Рассмотрим задачу о генерации альфвеновских волн при распространении в проводящей среде космических лучей с анизотропным угловым распределением. При этом будем исходить из магнитогидродинамического уравнения [31—34]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{c} [\mathbf{J}_s \mathbf{B}] \quad (5.1)$$

и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.2)$$

определяющих движение проводящей среды, а также из уравнений Максвелла для электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей

$$[\nabla \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.4)$$

и уравнения Лиувилля для функции распределения космических лучей

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + Ze \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (5.5)$$

При этом предполагается, что рассеяния космических лучей происходят достаточно редко, так что частота их рассеяний много меньше характерной частоты рассматриваемого процесса. Это дает возможность не учитывать столкновительный член в кинетическом уравнении.

Полный ток \mathbf{j} складывается из тока \mathbf{j}_s , текущего в среде, и тока \mathbf{j}_c , обусловленного космическими лучами

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_c, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{j}_c = Ze \int \mathbf{v} f d^3 \mathbf{p}, \quad (5.7)$$

где Ze — заряд частиц космических лучей. В общем случае эти уравнения необходимо дополнить законом Ома для движущейся среды [31—35]

$$\mathbf{j}_s = \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{u} \mathbf{B}] / c), \quad (5.8)$$

связывающим между собой напряженность электрического поля \mathbf{E} и плотность электрического тока \mathbf{j}_s (σ — проводимость среды). Однако, как мы вскоре убедимся, в данном случае величина проводимости в окончательное решение поставленной задачи не входит, если только она достаточно велика.

Уравнения (5.1) — (5.4) при рассмотрении гидродинамических колебаний малой амплитуды допускают, как известно, ряд существенных упрощений. Прежде всего, как обычно, пренебрежем в уравнении (5.3) током смещения $(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$ по сравнению с током проводимости \mathbf{j} , считая выполненным необходимым для этого условие

$$\sigma \tau \gg 1, \quad (5.9)$$

где τ — характерное время процесса, в данном случае — период колебаний. Тогда уравнения (5.3) и (5.4) совместно с законом Ома (5.8) сводятся к уравнению (1.1), которое будет иметь особенно простой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [\nabla [\mathbf{u} \mathbf{B}]], \quad (5.10)$$

если выполнено условие «вмороженности» (1.4):

$$4\pi \sigma R^2 / (\tau c^2) \gg 1. \quad (5.11)$$

Условие (5.9) требует, чтобы рассматриваемые колебания были достаточно медленными, а условие (5.11) — чтобы они были длинноволновыми. Оба эти условия, как видно, выполнены при достаточно хорошей проводимости.

Поскольку детальный анализ (которого мы здесь не приводим) показывает, что альфвеновские волны, распространяющиеся вдоль

регулярного магнитного поля, является наименее затухающей магнитогидродинамической модой, остановимся именно на этом случае.

Представляя все величины X в виде суммы $X = X_0 + \delta X$, усредненной по флуктуациям турбулентных пульсаций альфвеновских волн компоненты $X_0 = \langle X \rangle$ и флуктуирующей добавки δX , опуская в дальнейшем для краткости индекс «0», рассматривая малые возмущения δX как плоские волны — $\delta X \sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$, распространяющиеся вдоль поля $\mathbf{B}(\mathbf{k} \parallel \mathbf{B})$, и линеаризуя уравнения (5.1), (5.2) и (5.10), приходим к соотношениям

$$\omega \rho \delta \mathbf{u} = - \frac{k_{\parallel}}{4\pi B} [(\mathbf{B} \delta \mathbf{B}) \mathbf{B}] + \frac{i}{c} [\delta \mathbf{j}_c \mathbf{B}], \quad (5.12)$$

$$\omega \delta \mathbf{B} = k_{\parallel} [\mathbf{B} [\delta \mathbf{u} \mathbf{B}]] / B, \quad (5.13)$$

где k_{\parallel} — проекция волнового вектора на силовую линию магнитного поля; в отличие от модуля волнового вектора $k = |\mathbf{k}|$ величина k_{\parallel} знакопеременна. Поперечная по отношению к магнитному полю \mathbf{B} компонента тока космических лучей $\delta \mathbf{j}_{c\perp}$, входящая в уравнение (5.12), обусловлена возмущением функции распределения космических лучей, вызванным возбуждаемыми волнами.

Выделяя в уравнении (5.5) линейные по малым возмущениям δf , $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{B}$ члены, получим уравнение для δf (см., например, [4, 6]):

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \delta f + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = Q, \quad (5.14)$$

где

$$Q = \frac{Ze}{c} ([\delta \mathbf{u} \mathbf{B}] - [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}]) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}.$$

Учет аксиальной симметрии функции распределения $f(\mathbf{p}) = f(p, \mu)$ совместно с соотношением (5.13) дает

$$Q = - \frac{Ze}{Bc} [\delta B B] p \Psi(p, \mu), \quad (5.15)$$

где

$$\Psi(p, \mu) = \frac{v}{p^2} \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{\omega}{k_{\parallel} p} \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\mu}{p} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right),$$

$\mu = \mathbf{p} \mathbf{B} / p B$ — косинус питч-угла частиц.

Решение уравнения (5.14)

$$\delta f(\mathbf{r}, p, t) = \int G(\mathbf{r}, p, t; \mathbf{r}', p', t') Q(\mathbf{r}', p', t') d^3 \mathbf{r}' d^3 p' dt' \quad (5.16)$$

выражается через функцию Грина уравнения (5.5)

$$G(\mathbf{r}, p, t; \mathbf{r}', p', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \Delta \mathbf{r}) \delta(p - p' - \Delta p) \theta(t - t'), \quad (5.17)$$

где

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_H(t - t') + \Delta \mathbf{r}_{\perp}(t, t'),$$

$$\Delta p = p_{\perp} \{1 - \cos[\omega_B(t - t')]\} + [p B] \sin[\omega_B(t - t')] / B$$

— изменения координаты и импульса частицы за время $t - t'$ при ее движении в регулярном магнитном поле \mathbf{B} , $\omega_B = ZeB/(mc)$ — гирочастота.

Из выражений (5.16) и (5.17) следует, что ток космических лучей можно представить в виде

$$\delta j_e = P_1 \delta \mathbf{B} + P_2 [\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}] / B, \quad (5.18)$$

где

$$P_{1,2} = \frac{(Ze)^2}{2c} \int \Phi_{1,2} v p (1 - \mu^2) \Psi(p, \mu) d^3 p, \quad (5.19)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega - \omega_B - k v} - \frac{1}{\omega + \omega_B - k v} \right),$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - \omega_B - k v} + \frac{1}{\omega + \omega_B - k v} \right).$$

Подставляя выражение (5.18) в уравнение (5.12) и используя соотношения (5.13) и (5.19), получим дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_a^2 - \frac{B^2}{\rho k_{\parallel} c} (\pm P_1 - i P_2), \quad (5.20)$$

где $c_a = B/\sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость, а знаки «+» и «-» относятся к право- и левовращающим поляризованным волнам, амплитуда которых представима в виде $\delta \mathbf{B}_{\pm} = \mathbf{b} \pm i[\mathbf{b}\mathbf{B}]/B$, где вектор \mathbf{b} перпендикулярен магнитному полю \mathbf{B} .

Представляя частоту колебаний как $\omega = \omega_0 + i\Gamma$ и используя при вычислении величин $P_{1,2}$ соотношение Сохоцкого между обобщенными функциями, которое справедливо при выполнении условия $|\Gamma| \ll \omega_0$:

$$\frac{1}{\omega \pm \omega_B - k v} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_0 \pm \omega_B - k v} \right) + i\pi \delta(\omega_0 \pm \omega_B - k v),$$

где символ \mathcal{P} означает интеграл в смысле главного значения, приходим к выражению для инкремента

$$\Gamma = - \left(\frac{\pi Z e^2}{c} \right)^2 \frac{c_a}{k_{\parallel}} \int p (1 - \mu^2) \Psi(p, \mu) \delta \left(\mu \pm \frac{\omega_B}{k_{\parallel} v} - \frac{\omega_0}{k_{\parallel} v} \right) d^3 p.$$

Если функцию распределения частиц космических лучей, входящую в это выражение, отнести к системе отсчета, движущейся вместе с волной в направлении \mathbf{k} со скоростью c_a , то выражение для инкремента примет особенно простой вид:

$$\Gamma = - \left(\frac{\pi Z e^2}{c} \right)^2 \frac{c_a}{k_{\parallel}} \int \frac{v}{p} (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \delta \left(\mu \pm \frac{\omega_B}{k_{\parallel} v} \right) d^3 p. \quad (5.21)$$

Таким образом, анизотропия углового распределения космических лучей обуславливает неустойчивость альфвеновских волн. Амплитуда волн, как видно из выражения (5.21), которые распространяются вдоль направления преимущественного движения космических лучей ($k_{\parallel} \partial f / \partial \mu > 0$), нарастает; волны же, распространяющиеся в противоположном направлении, затухают — для них $k_{\parallel} \partial f / \partial \mu < 0$, и поэтому $\Gamma > 0$.

Кроме того, выражение (5.21) показывает, что в том случае, когда анизотропная часть функции распределения является печетной функцией μ (например, $f = a_0 + a_1\mu$), величина инкремента одна и та же для волн с разной поляризацией.

17.2. Самосоогласованная диффузия космических лучей и уравнение переноса. Возбуждаемая космическими лучами альфвеновская турбулентность может, в свою очередь, влиять на их распространение. Рассмотрим ситуацию, когда в среде имеется только самосоогласованная турбулентность, генерируемая самими частицами. Уравнение переноса, определяющее в этом случае распространение космических лучей, можно установить исходя из следующих соображений.

Взаимодействие космических лучей с хаотическим полем альфвеновских волн приводит к их рассеянию, которое можно характеризовать некоторой эффективной частотой ν . Для определения величины частоты рассеяний можно воспользоваться уравнением баланса импульса

$$\frac{1}{c_a} \frac{d}{dt} \int E_w(k) d \ln k = \int \nu p_{\parallel} f d^3 p, \quad (5.22)$$

где $E_w(k) = (1/8\pi) d\delta B^2/d \ln k$ — плотность магнитной энергии альфвеновских волн на единичный интервал логарифма волновых чисел. Левая часть равенства представляет собой скорость роста плотности потока импульса, переносимого альфвеновскими волнами; в правой его части стоит скорость уменьшения плотности потока импульса космических лучей, обусловленного их изотропизацией за счет рассеяний.

Выражая величину dE_w/dt через инкремент $dE_w/dt = -2\Gamma E_w$, предполагая, что благодаря рассеяниям угловое распределение космических лучей достаточно хорошо описывается первыми двумя гармониками

$$f(p, \mu) = f(p) + f_1(p)\mu, \quad (5.23)$$

и используя выражение (5.21), получим из соотношения (5.22) выражение для частоты рассеяний космических лучей

$$\nu = 3 \left(\frac{\pi Z e}{c} \right)^2 \frac{v}{p^2} \int_{\omega_B/v}^{\infty} \frac{E_w}{k^2} \left(1 - \frac{\omega_B^2}{v^2 k^2} \right) dk. \quad (5.24)$$

Если функция $E_w(k)$ не слишком быстро спадает с ростом волнового числа k , можно приближенно выполнить интегрирование в выражении (5.24), вынося функцию E_w , взятую при $k = \omega_B/v$, за знак интеграла, что дает

$$\nu(p) = (\pi/4) \omega_B E_w(k = \omega_B/v) / (B^2/8\pi).$$

Заметим, что эта математическая процедура отражает резонансный характер взаимодействия волн и космических лучей.

Таким образом, генерируемые частицами альфвеновские волны вызывают самосогласованную диффузию частиц с коэффициентом диффузии

$$\kappa(p) = \frac{v^2}{3v} = \frac{4}{3\pi} \frac{v^2 (B^2/8\pi)}{\omega_B E_w (k = \omega_B/v)}. \quad (5.25)$$

По поводу этого выражения представляется необходимым сделать следующие замечания.

Допущения, принятые при выполнении интегрирования в выражении (5.24), делают полученный результат определенным, в лучшем случае, с точностью до численного множителя. Физической причиной данной неопределенности является весьма существенная ширина резонанса, отвечающего взаимодействию волна — частица, что видно из выражения (5.24). Поэтому несколько отличающиеся допущения о характере спектра турбулентности у различных авторов при выводе выражения для коэффициента диффузии частиц приводят к результатам, различающимся численными множителями (см., например, [46, 140]). Кроме того, найденный коэффициент диффузии (5.25) по своему смыслу отвечает продольной по отношению к регулярному магнитному полю диффузии частиц. Установление характера диффузии поперек силовых линий магнитного поля требует дополнительного, более детального рассмотрения.

Нетрудно понять, что уравнение переноса космических лучей сохранит свой прежний вид, если входящую в него скорость рассеивающих центров, которая везде прежде считалась совпадающей со скоростью среды \mathbf{u} , заменить скоростью движения альфвеновских волн

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{c}_a,$$

что дает

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \kappa \nabla f - \mathbf{w} \nabla f + \frac{\mathbf{v} \mathbf{w}}{3} p \frac{\partial f}{\partial p} + Q, \quad (5.26)$$

где $\mathbf{c}_a = c_a \mathbf{k}/k$ — вектор скорости альфвеновских волн относительно среды.

Заметим, что основные результаты этого параграфа, касающиеся получения инкремента нарастания альфвеновских волн (5.24) и уравнения переноса космических лучей (5.26), полностью совпадают с теми, что дает более строгая квазилинейная теория [46, 101, 140—142], последовательное изложение которой можно найти в работах [6, 39, 45, 143, 144].

Хотя описанный нами подход зачастую недостаточно строг, тем не менее его использование позволяет чрезвычайно просто получить все основные результаты.

17.3. Самосогласованная задача регулярного ускорения космических лучей плоской ударной волной. В одномерном случае плоской идеальной ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля в отрицательном направлении оси X , уравнение (5.26) для космических лучей, ускоряющихся ударной волной, и уравнение для плотности энергии альфвеновских волн примут в системе отсче-

та ударного фронта ($x = 0$) соответственно вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial x} \right) - (u - c_a) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) p \frac{\partial f}{\partial p} + Q, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} + (u - c_a) \frac{\partial E_w}{\partial x} = -2\Gamma E_w, \quad (5.28)$$

где инкремент нарастания альфвеновских волн определяется выражением

$$\Gamma = -\frac{2\pi}{3} \frac{p^4 c_a}{E_w} v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (5.29)$$

а коэффициент диффузии κ — выражением (5.25). При переходе от общего выражения (5.21) к выражению (5.29) использованы соотношения (2.1) и (2.3), отвечающие диффузионному приближению. При этом первый момент функции распределения (2.3), если его отнести к локальной системе отсчета, связанной с альфвеновскими волнами (рассеивающими центрами), имеет вид

$$f_x^v = -\frac{3\kappa}{v} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подстановка этого соотношения в (5.21) и выполнение в нем приближенно интегрирования по p , как это было сделано при выводе формулы (5.25) для коэффициента диффузии, приводят к соотношению (5.29). Следствием описанной процедуры является то, что величины $E_w(k)$ и $\Gamma(k)$ можно рассматривать как функции импульса, поскольку значение волнового числа везде здесь должно быть принято $k = \omega_B/v$.

Ограничимся, как и прежде, случаем инжекции моноэнергетических частиц:

$$f_1(-\infty, p) = \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0), \quad (5.30)$$

$$Q = \frac{u_1 N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \delta(x). \quad (5.31)$$

Отсутствие ускоренных частиц на больших расстояниях от ударного фронта означает также, что

$$E_w(-\infty, k) = 0. \quad (5.32)$$

В стационарном случае уравнения (5.27) и (5.28) с учетом (5.25) и (5.29) можно записать в виде

$$(u - c_a) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{E_w} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) p \frac{\partial f}{\partial p} + u_1 \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \delta(x), \quad (5.33)$$

$$(u - c_a) \frac{\partial E_w}{\partial x} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (5.34)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} \frac{p^4 v c_a}{(B^2/8\pi)}, \quad \beta = \frac{4}{3\pi} \frac{p v c}{Z e B}.$$

Решая уравнение (5.34) в области перед ударным фронтом ($x < 0$), получаем

$$E_{w1} = \frac{\alpha}{u_1 - c_a} f_1 + A. \quad (5.35)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.33) и интегрируя его по координате x , приходим к уравнению первого порядка

$$\left(f_1 + \frac{u_1 - c_a}{\alpha} A\right) (f_1 + B) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x}. \quad (5.36)$$

Нетрудно убедиться в том, что краевым условиям (5.30) и (5.32) удовлетворяют величины A и B , если они связаны соотношением $A(u_1 - c_a)/\alpha = B$. В этом случае решение уравнения (5.36) имеет вид

$$f_1 = -B - (x\alpha/\beta + C)^{-1}. \quad (5.37)$$

Условие (5.30), как видно отсюда, выполняется при

$$B = -\frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0). \quad (5.38)$$

Другая неизвестная величина C определяется из условия непрерывности функции распределения на ударном фронте, которое можно записать в виде $f_1(0, p) = f_2(p)$, поскольку, как нетрудно видеть, в области за ударным фронтом ($x > 0$) решением уравнений (5.33) и (5.34) являются не зависящие от координаты функции E_{w2} и f_2 . Из этого соотношения получаем

$$C = -\left[f_2(p) - \frac{N_\infty}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0)\right]^{-1}. \quad (5.39)$$

Функцию распределения ускоренных частиц в области за ударным фронтом $f_2(p)$ находим обычным образом из условия (2.24) непрерывности потока частиц на фронте, что приводит к универсальному спектру

$$f_2(p) = \frac{N_0 + N_\infty}{4\pi p_0^2} q \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-q}, \quad q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1}. \quad (5.40)$$

С учетом выражений (5.38) и (5.39) соотношения (5.35) и (5.37) определяют распределение ускоренных частиц и альфвеновской турбулентности в области перед ударным фронтом:

$$f_1(x, p) = f_1(-\infty, p) + [f_2(p) - f_1(-\infty, p)](1 - x/x_0)^{-1}, \quad (5.41)$$

$$E_w(x, p) = \frac{4\pi}{3} \frac{c_a p^4 v}{u_1 - c_a} [f_1(x, p) - f_1(-\infty, p)], \quad (5.42)$$

где

$$x_0 = \frac{(B^2/8\pi) cu_1}{\pi^2 c_a v p^4 [f_2(p) - f_1(-\infty, p)]} \rho_B. \quad (5.43)$$

Величина x_0 является в данном случае диффузионной длиной $L = \kappa/u_1$ проникновения ускоренных частиц в области $x < 0$. Как видно из (5.43), она определяется отношением плотности энергии регулярного магнитного поля и парциального давления частиц:

$$\mathcal{P}(p) = \frac{dP}{d \ln p} = \frac{4\pi}{3} v p^4 f(p). \quad (5.44)$$

Чем выше давление частиц, тем меньше масштаб x_0 . В рамках рассматриваемого линейного по давлению частиц варианта теории величина давления \mathcal{P} регулируется мощностью инжекции. Поскольку исходные уравнения, являющиеся следствием квазилинейной теории, остаются в силе при условии $E_\omega \leq B^2/8\pi$, приходим к следующему выводу: минимально допустимый с точки зрения квазилинейной теории коэффициент диффузии частиц, определяемый самосогласованной турбулентностью, составляет

$$\kappa_{\min}(p) = \rho_B v/3. \quad (5.45)$$

Указанное значение коэффициента κ_{\min} достигается тогда, когда амплитуда турбулентного магнитного поля δB становится равной величине регулярного поля B . Пробег частицы до рассеяния в этом случае равен ее гирорадиусу ρ_B . Интересно также отметить, что предел (5.45) достигается, когда парциальное давление космических лучей составляет

$$\mathcal{P}(p) = \frac{u_1}{c_a} \frac{B^2}{8\pi},$$

т. е. в u_1/c_a раз превышает давление регулярного магнитного поля, что, как мы вскоре убедимся, в случае достаточно сильных ударных волн вполне достижимо. В связи с этим весьма важной становится разработка теории генерации альфвеновских волн в окрестности ударного фронта с учетом нелинейных эффектов.

Изложенное здесь решение самосогласованной задачи регулярного ускорения впервые было осуществлено Бэллом [46, 47].

§ 18. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ С КОСМИЧЕСКИМИ ЛУЧАМИ

Гидродинамический подход к описанию космических лучей, развитый в [71, 72], был впервые применен к исследованию модификации структуры ударной волны космическими лучами в работе [54], а затем в [145—149]. Указанный подход основан на системе обычных магнитогидродинамических уравнений, в которую наряду с величинами, характеризующими газ (тепловую плазму), входят макроскопические характеристики космических лучей и плазменной турбу-

лентности, которая может генерироваться в окрестности ударного фронта частицами космических лучей. Поэтому такое теоретическое описание получило название трехжидкостной гидродинамики.

18.1. Основные уравнения. В одномерном случае плоской ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля против оси X , система гидродинамических уравнений Эйлера может быть записана в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (5.46)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x}(P_g + P_e + P_w), \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial E_g}{\partial t} + \frac{\partial F_g}{\partial x} = u \frac{\partial P_g}{\partial x}, \quad (5.48)$$

где ρ и u — плотность и гидродинамическая скорость газа; F_g — плотность потока энергии газа, которая связана с плотностью внутренней энергии E_g и давлением P_g соотношением

$$F_g = u(E_g + P_g). \quad (5.49)$$

В уравнение движения (5.47) помимо газового включено также давление, создаваемое космическими лучами P_e и турбулентностью P_w , которую в дальнейшем будем считать представленной в виде альфвеновских волн, генерируемых космическими лучами перед ударным фронтом.

Уравнения, связывающие макроскопические параметры космических лучей — давление P_e , плотность энергии E_e и поток энергии F_e , получаются в результате почленного интегрирования уравнения переноса (5.27) по $4\pi p^3 dp$ с использованием выражения (2.3) для первого момента функции распределения:

$$\frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial F_e}{\partial x} = w \frac{\partial P_e}{\partial x}, \quad (5.50)$$

$$F_e = w(P_e + E_e) - \bar{\kappa} \frac{\partial E_e}{\partial x}. \quad (5.51)$$

Эффективный коэффициент диффузии космических лучей, который формально определяется выражением

$$\bar{\kappa} = \int_0^\infty dp p^3 v \kappa \frac{\partial f}{\partial x} / \int_0^\infty dp p^3 v \frac{\partial f}{\partial x},$$

в этой теории считается заданной, положительно определенной величиной.

Разделение всех частиц плазмы на газ (или тепловую компоненту) и космические лучи, хотя и носит несколько условный характер, во многих случаях бывает оправдано. Так, в случае сильной ударной волны энергосодержание плазмы представлено двумя компонентами. Первая из них, именуемая газом, — частицы теплового распределения плазмы. Вторая — относительно небольшая часть

частиц из теплового распределения, которые подверглись ускорению, — космические лучи. Жесткий характер спектра ускоренных сильной ударной волной частиц является причиной того, что энергосодержание космических лучей обеспечивается главным образом наиболее высокоэнергичными частицами их спектра. Иначе говоря, частицы газа и космических лучей хорошо разделены по энергии.

Так как космические лучи составляют небольшую долю от полного количества частиц плазмы, можно пренебречь их вкладом в плотность среды ρ . По той же причине, даже если инжекция космических лучей осуществляется из тепловой плазмы, пренебрегается источником энергии в уравнении (5.50).

Входящая в уравнения (5.50) и (5.51) скорость рассеивающих центров в случае, когда основным типом плазменной турбулентности являются альфвеновские волны, генерируемые в области перед ударным фронтом (см. § 17), отличается от скорости газа на величину альфвеновской скорости (см. также [150])

$$w = u - c_a.$$

Уравнения, связывающие макроскопические параметры альфвеновских волн:

$$2 \frac{\partial P_w}{\partial t} + \frac{\partial F_w}{\partial x} = u \frac{\partial P_w}{\partial x} + c_a \frac{\partial P_c}{\partial x}, \quad (5.52)$$

$$F_w = P_w(3u - 2c_a), \quad (5.53)$$

можно вывести формально на основе квазилинейной теории [147, 148, 151, 152], используя полученное в § 17 выражение (5.29) для инкремента нарастания альфвеновских волн. В то же время их можно без труда сформулировать, не прибегая к детальным выкладкам, если воспользоваться следующими простыми рассуждениями. Поток энергии F_w состоит из суммы двух членов, один из которых обусловлен конвективным переносом энергии E_w со скоростью $u - c_a$, а другой — связан с работой против сил давления: $F_w = (u - c_a)E_w + uP_w$. В свою очередь, энергия альфвеновских волн складывается из энергии магнитного поля и энергии механических движений

$$E_w = \frac{\delta B^2}{8\pi} + \frac{\rho \delta u^2}{2},$$

причем оба эти члена равны по значению. Поскольку альфвеновская волна является поперечной, механические движения в ней не создают давления в направлении распространения волны, откуда вытекает

$$E_w = \delta B^2/4\pi = 2P_w.$$

В общем случае связь между давлением P и плотностью энергии E выражается через показатель адиабаты γ :

$$P = (\gamma - 1)E, \quad (5.54)$$

поэтому альфвеновским волнам можно приписать эффективный показатель адиабаты: $\gamma_w = 3/2$.

Из сказанного автоматически вытекает уравнение баланса энергии с источником (5.52). Только в случае, когда источник имеет вид $c_s \partial P_c / \partial x$ (см. (5.52)), из соотношений (5.46) — (5.51) следует уравнение энергобаланса для всей системы нужного вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = u \frac{\partial P}{\partial x},$$

где E — плотность суммарной внутренней энергии, P и F — суммарное давление и поток энергии всех трех компонент. Это уравнение, используя (5.46) и (5.47), можно переписать в ином виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E + \rho u^2/2) + \frac{\partial}{\partial x} (F + \rho u^3/2) = 0.$$

В такой форме уравнение энергобаланса, где к плотности E и потоку F внутренней энергии добавлены члены, связанные с направленным движением газа, отражает замкнутость системы.

Уравнения (5.46) — (5.53) в стационарном случае (в системе отсчета ударного фронта) позволяют обобщить соотношения Ренкина — Гюгонно [147]:

$$\rho u = \text{const}, \quad (5.55)$$

$$\rho u^2 + P_g + P_c + P_w = \text{const}, \quad (5.56)$$

$$\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} \frac{P_g}{\rho} \right) + F_c + F_w = \text{const}, \quad (5.57)$$

описывающие сохранение потоков вещества, импульса и энергии соответственно.

18.2. Ударная волна в холодном газе без магнитного поля. Основные особенности в структуре ударной волны, возникающие при учете обратного влияния космических лучей, можно проследить тогда, когда альфвеновская турбулентность динамически несущественна (двухжидкостная гидродинамика).

Характер модификации ударной волны давлением космических лучей особенно нагляден для холодного газа перед ударным фронтом: $P_{c1} \ll P_{c1}$. В этом случае, пренебрегая внутренним давлением газа и альфвеновской турбулентности и используя выражение (5.51) для потока энергии космических лучей, соотношения (5.55) — (5.57) можно записать в виде

$$\rho u = \rho_1 u_1,$$

$$u + P_c / \rho_1 u_1 = u_1 + P_{c1} / \rho_1 u_1,$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} u \frac{P_c}{\rho_1 u_1} - \frac{\tilde{\kappa}}{\gamma_c - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_c}{\rho_1 u_1} \right) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} \frac{P_{c1}}{\rho_1}.$$

Исключая из этих соотношений давление P_c , приходим к уравнению для скорости газа u :

$$\tilde{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma_c + 1}{2} (u - u_1)(u - u_2).$$

Решение этого уравнения [54]

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{th} \left[\frac{(\gamma_c + 1)(u_1 - u_2)}{4} \int \frac{dx}{\kappa} \right] \quad (5.58)$$

описывает плавный переход от значения $u(-\infty) = u_1$ до $u(\infty) = u_2 = u_1/\sigma$, где

$$\sigma = \left[\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c + 1} + \frac{2}{M_1^2 (\gamma_c + 1)} \right]^{-1}$$

— степень сжатия вещества на ударном фронте,

$$M_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma_c P_{c1}}}$$

— число Маха. Заметим, что в рассматриваемом случае скорость звука в среде определяется давлением космических лучей $c_s = \sqrt{\gamma_c P_s / \rho}$.

Таким образом, ударная волна в среде, где давление космических лучей доминирует, реализуется с плавным ударным переходом, характерная толщина которого составляет $l \approx 2\kappa/u_1$. При этом вся внутренняя энергия плазмы за ударным фронтом приходится на космические лучи $P_2 = P_{c2} = P_{c1} [1 + M_1^2 \gamma_c (\sigma - 1)/\sigma]$. Такую структуру ударной волны принято называть гладкой в отличие от ситуации, когда в области ударного фронта имеется участок резкого изменения параметров газа.

18.3. Смешанная структура ударного фронта. При произвольных значениях параметров среды перед фронтом P_{s1} , P_{c1} , M_1 [145, 146] с учетом динамики турбулентного поля δB [147, 148] структура ударной волны более сложная. Наряду с участком плавного изменения всех параметров на характерной длине $L \sim \kappa/u_1$ (предфронт) имеется тепловой фронт. Как и в обычной гидродинамической теории, не учитывающей эффектов вязкости и теплопроводности, тепловой фронт представляет собой разрыв в поведении параметров газа ρ , u , P_s как функций x , причем их значения по обе стороны разрыва связаны соотношениями Репкина — Гюгонно (5.55) — (5.57), в которых параметры космических лучей всюду непрерывны. В отличие от (5.58) уравнение для u , к которому сводится в стационарных условиях система уравнений (5.46) — (5.53), в общем случае имеет вид [147]

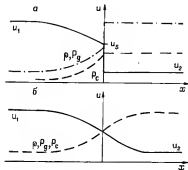
$$\frac{du}{dx} = \frac{(u_1 - u) \Phi(u)}{dP_c/du},$$

где функция $\Phi(u)$ определяется значением параметров среды перед ударным фронтом P_{s1} , P_{c1} , P_{s1} , M_1 .

Наличие или отсутствие в структуре ударной волны разрыва (теплового фронта) зависит от того, как соотносятся между собой значения $u_\infty < u_1$ — корня уравнения $\Phi(u) = 0$ и u_{*1} при котором

Рис. 5.1. Схематическая структура ударной волны в газе с космическими лучами.

Случай гладкой (б) и смешанной (а) структур ударного фронта.



давление космических лучей достигает максимума и производная dP_c/du обращается в ноль. Чтобы прояснить смысл величины u_* , воспользуемся соотношениями (5.55) — (5.57). Дифференцируя по u второе из них, с помощью первого приходим к уравнению

$$\frac{d}{du} (P_g + P_w) = -\frac{\rho_1 u_1}{u^2} c_s^2,$$

где $c_s = \sqrt{\frac{d}{d\rho} (P_g + P_w)}$ играет роль скорости звука при наличии в среде альфвеновской турбулентности [153]. Это уравнение можно записать в форме

$$\frac{dP_c}{du} = \frac{\rho_1 u_1}{u^2} (c_s^2 - u^2).$$

Из него следует, что u_* является той точкой, в которой скорость плазмы становится равной местной скорости звука. Поскольку производная du/dx обращается в этой точке в бесконечность и решение $u(x)$ не может быть продолжено правее указанной точки, оно становится многозначным и физически означает нереализуемое многопоточковое течение. Поэтому в течении должен возникнуть скачок — резкий переход из одного состояния в другое [145, 146]. Если $u_* < u_\infty$, то тепловой фронт отсутствует и ударная волна имеет гладкую структуру и представляет собой плавный переход от значения u_1 до $u_2 = u_\infty$ на длине $L \sim \kappa/u_1$, причем течение газа за ударным фронтом остается сверхзвуковым ($u_2 > c_s$). При $u_* > u_\infty$ в структуре ударной волны с необходимостью возникает тепловой фронт — скачок скорости $u(x)$ в некоторой точке x от значения $u_s > u_*$ до $u_2 < u_\infty$. Схематически случаи гладкой и смешанной структур ударной волны изображены на рис. 5.1.

Соотношения между u_* и u_∞ , а также величины u_s и u_2 зависят от параметров $K = P_{c1}/(P_{c1} + P_{g1})$, M_1 и скорости затухания альфвеновских волн. Важно отметить, что затухание волн определяет степень справедливости уравнений (5.52), (5.53): если оно мало, то амплитуда альфвеновских волн в области предфронта может достигать больших величин ($\delta B/B \gtrsim 1$), что нарушает применимость ква-

зилинейной теории, на основе которой получены данные уравнения [147, 148].

Действительно, уравнения (5.52), (5.53), как нетрудно видеть, можно свести к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} [(3u - 2c_a) P_w] = u \frac{\partial P_w}{\partial x} + c_a \frac{\partial P_c}{\partial x}.$$

Учитывая взаимосвязь скорости газа и альфвеновской скорости с плотностью ($u \sim \rho^{-1}$, $c_a \sim \rho^{-1/2}$, что дает $c_a \sim \sqrt{u}$), а также используя уравнения (5.50) и (5.51), нетрудно получить отсюда соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} [2(u - c_a)^2 P_w / c_a] = \frac{\partial}{\partial x} F_c,$$

показывающее, что между плотностью энергии альфвеновских волн и потоком энергии космических лучей имеется простая связь [52, 65, 147]:

$$\frac{(u - c_a)^2}{c_a} E_w = F_c + \text{const.}$$

Это соотношение согласуется с результатами § 17 — альфвеновским волнам переходит доля энергии космических лучей, по порядку величины равная c_a/u_1 . Несмотря на то, что в случае сильных ударных волн $c_a \ll u_1$, амплитуда альфвеновских волн δB может превысить напряженность регулярного магнитного поля B : плотность энергии космических лучей благодаря их высокой эффективности ускорения $\sim \rho_1 u_1^2$, следовательно, плотность энергии альфвеновских волн может составлять величину $\sim \rho_1 u_1 c_a$, в то время как плотность энергии регулярного магнитного поля равна $\rho_1 c_a^2/2$. Отсюда вытекает, что при $u_1 \gg c_a$ генерация альфвеновских волн в отсутствие затухания очень быстро, в самом начале предфронта, выходит на нелинейный режим.

Поскольку нелинейная теория альфвеновских волн далека от завершения, представляют интерес исследования структуры ударной волны, выполненные для случая сильного затухания, когда амплитуда альфвеновских волн ограничена на уровне $\delta B/B < 1$ и в каждой точке достигается баланс между темпами генерации $c_a dP_c/dx$ и затухания $L = c_a \partial P_c / \partial x$ (заметим [154], что для не слишком сильных ударных волн с числами Маха $M_1 \leq 10$ нелинейное затухание Ландау ограничивает рост турбулентности на уровне $\delta B/B \leq 1$). Работа, производимая градиентом давления космических лучей, идет в этом случае на нагрев газа, вследствие чего он может существенно нагреваться не только при переходе через тепловой фронт, но и в области предфронта, где его состояние описывается уравнением [147]:

$$\frac{u \rho^{\gamma_g - 1}}{\gamma_g - 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{P_g}{\rho^{\gamma_g}} \right) = L.$$

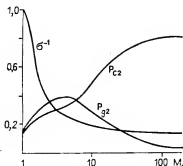


Рис. 5.2. Давление газа P_{g2} и космических лучей P_{c2} (в единицах $\rho_1 u_1^2 + P_{g1}$) за фронтом ударной волны и степень сжатия σ в зависимости от числа Маха M_1 [148].

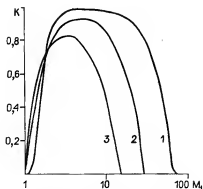


Рис. 5.3. Кривые $K(M_1)$, разделяющие области изменения параметров $K = P_{c1}/(P_{g1} + P_{c1})$ и M_1 (число Маха), соответствующие гладкой ($K > K(M_1)$) и смешанной ($K < K(M_1)$) структурам ударных волн [148] для разных значений $\beta = 8\pi P_{g1}/B^2$: 1 — $\beta = 1$, 2 — $\beta = 10$; 3 — $\beta = 10^2$.

Дополнительный нагрев газа понижает эффективность ускорения, т. е. снижает относительную долю энергии, переходящей частицам космических лучей. Тем не менее, как показывают численные решения системы уравнений (5.46) — (5.53), эффективность ускорения остается достаточно высокой. Это видно на примере рис. 5.2, где представлены результаты расчетов [148] величин степени сжатия σ , давления газа P_{g2} и космических P_{c2} лучей за ударным фронтом в зависимости от числа Маха M_1 для случая $K = 0,5$, $\beta = 8\pi P_{g1}/B^2 = 1$. Как видно, более половины давления за ударным фронтом при числах Маха $M_1 \gtrsim 10$ приходится на ускоренные частицы. Расчет был выполнен для $\gamma_c = 4/3$ в предположении, что космические лучи являются релятивистскими частицами, поэтому степень сжатия при больших числах Маха, когда основная часть давления за ударным фронтом приходится на космические лучи, стремится к предельному значению $\sigma = 7$ в соответствии с выражением (1.9).

Результаты расчета [148], представленные на рис. 5.3 в виде графиков зависимости K от M_1 для разных значений параметра β , показывают, при каких значениях параметров K и M_1 в структуре ударной волны имеется тепловой фронт (область под кривой $K(M_1)$), а при каких — отсутствует (область над кривой $K(M_1)$). Так, при $K = 0,5$ и $\beta = 1$ практически для любых чисел Маха, меньших 50, существует решение с тепловым фронтом.

Анализ показывает [155, 156], что при учете эффектов вязкости разрывные решения магнитогидродинамической системы уравнений реализуются как непрерывные, в которых реальная толщина теплового фронта определяется коэффициентами вязкости.

Таким образом, магнитогидродинамический подход, который можно обобщить на случай магнитного поля произвольной ориента-

ции [157], позволил выявить ряд важных особенностей процесса ускорения космических лучей ударными волнами. Он продемонстрировал, что на долю космических лучей в ударных волнах должна приходиться существенная часть (в некоторых случаях вся) внутренней энергии плазмы, а также выявил особенности процесса генерации и затухания альфвеновских волн вблизи ударного фронта и их влияние на эффективность ускорения.

Вместе с тем следует отметить упоминавшийся уже в литературе недостаток гидродинамического подхода: отсутствие информации о спектре космических лучей, а также о таком параметре, как импульс обрезания p_m . Теория дает ответ на вопрос, какая доля энергии в ударной волне приходится на космические лучи, но не в состоянии решить вопрос о том, возможно ли это при конкретном конечном значении p_m . Важность отмеченного момента, на который, в частности, обращалось внимание в работе [156], особенно ясно видна из следующего примера. Как показывают данные расчетов [145], при достаточно больших числах Маха M_1 на фронте ударной волны давление имеет конечное значение, даже если перед ударной волной космических лучей не было ($P_{cl} = 0$). Смысл такого решения состоит в том, что исчезающе малое количество космических лучей в силу их жесткого спектра, простирающегося до бесконечности, может содержать конечную энергию. Однако ясно, что такая ситуация не может реализоваться при сколь угодно большом, но конечном импульсе обрезания p_m . Поэтому вопрос об эффективности процесса регулярного ускорения в условиях реальных систем с конечным значением p_m должен исследоваться в рамках подходов, в которых указанная величина присутствует в явном виде.

§ 19. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ

Коллективный характер процессов рассеяния частиц в бесстолкновительной плазме является причиной того, что рассеяния быстрых частиц являются квазиупругими. Элементарный акт рассеяния в системе отсчета, связанной с рассеивающим центром, осуществляется упруго. Физически это связано с тем, что рассеивающий центр представляет собой конгломерат большого числа тепловых частиц, вследствие чего изменение его энергии в процессе рассеяния пренебрежимо мало.

Для того чтобы описать в рамках единого подхода не только процесс ускорения, но и процесс нагрева частиц плазмы на тепловом фронте с последующей инжекцией некоторой их доли в режим ускорения, можно допустить, что характер движения тепловых частиц в бесстолкновительной плазме такой же, как и быстрых [158—162]. Хотя сколько-нибудь строгое обоснование такого предположения вряд ли возможно, тем не менее его использование позволяет внутренне непротиворечивым образом промоделировать процесс регулярного ускорения в случае, когда инжекция осуществляется непосредственно из теплового распределения частиц без их дополнительного доускорения.

19.1. Кинетическое уравнение и условие самосогласования.

В целях упрощения можно предположить, что рассеяния частиц происходят изотропно. Тогда распространение частиц плазмы описывается единственным параметром τ — средним временем между рассеяниями, который непосредственно связан с уровнем плазменной турбулентности. Предполагая, как и прежде, что регулярное магнитное поле перпендикулярно фронту, в одномерном стационарном случае для функции распределения нерелятивистских ($v \ll c$) частиц можно написать кинетическое уравнение Больцмана, уже использовавшееся в гл. 4:

$$v\mu \frac{\partial f}{\partial x} = St f, \quad (5.59)$$

где μ — косинус угла между вектором скорости частицы v и осью X . При этом пренебрегается возможными эффектами разделения зарядов в плазме, в силу чего самосогласованная структура ударной волны полностью определяется давлением ионов основного сорта — протонов.

Учитывая сделанные предположения о характере рассеяний и пренебрегая хаотическими движениями рассеивающих центров, которые в этом случае имеют в каждой точке x определенную скорость $u(x)$, представим интеграл столкновений в виде

$$St f' = \frac{\langle f' \rangle - f'}{\tau}; \quad (5.60)$$

здесь штрихи указывают на принадлежность к локальной системе отсчета, связанной с рассеивающими центрами, а угловые скобки на усреднение по μ :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(\mu) d\mu.$$

Переходя в левой части уравнения (5.59) к локальной системе отсчета $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ и опуская в дальнейшем штрихи у величин, получим [158, 159]

$$(v\mu + u) \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{du}{dx} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1-\mu^2}{v} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \right] = \frac{\langle f \rangle - f}{\tau}. \quad (5.61)$$

В рассматриваемой модели рассеивающие центры являются частью среды (плазмы), которая описывается единой функцией распределения. Поэтому рассеяния не должны менять ни числа сталкивающихся частиц, ни их суммарных импульса и энергии. Отсюда следует, что изменение функции распределения, обусловленное интегралом столкновения, не может привести к изменению и макроскопических величин в каждом элементе объема среды — ее плотности, внутренней энергии и импульса. Математически эти условия записываются в виде

$$\int St f d^3p = 0, \quad \int \varepsilon St f d^3p = 0, \quad \int p St f d^3p = 0.$$

Для интеграла (5.60) первое из приведенных условий выполняется автоматически, а вторые два — при дополнительном условии на

функцию распределения:

$$\left\langle \mu \int_0^{\infty} \frac{fv}{\tau} p^2 dp \right\rangle = 0. \quad (5.62)$$

Совместно с кинетическим уравнением (5.61) это условие самосогласования определяет самосогласованную функцию распределения частиц плазмы $f(x, p)$ и профиль скорости ее движения $u(x)$.

19.2. Интегральные соотношения. Домножая уравнение (5.61) последовательно на $2\pi m p^2$, $2\pi(p\mu + mu)p^2$, $\pi m[(v\mu + u)^2 + v^2(1 - \mu^2)]$ и интегрируя по p , μ , x с использованием условия согласования (5.62), где m — масса ионов основного сорта, получим интегральные соотношения

$$\rho u + j = \rho_1 u_1, \quad (5.63)$$

$$\rho u^2 + P_{xx} + 2ju = \rho_1 u_1^2 + P_1, \quad (5.64)$$

$$\frac{\rho u^3}{2} + F + u(P_{xx} + E) + \frac{3}{2}ju^2 = \frac{\rho_1 u_1^3}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} u_1 P_1, \quad (5.65)$$

которые связывают макроскопические характеристики плазмы

$$\rho = 4\pi m \left\langle \int_0^{\infty} f p^2 dp \right\rangle,$$

$$P_{xx} = 2\pi \left\langle \mu^2 \int_0^{\infty} f v p^3 dp \right\rangle,$$

$$j = 4\pi m \left\langle \mu \int_0^{\infty} f v p^2 dp \right\rangle,$$

$$F = 2\pi m \left\langle \mu \int_0^{\infty} f p^5 dp \right\rangle$$

— плотность, компоненту тензора давления, плотность направленного потока вещества и энергии соответственно. Показатель адиабаты γ в рассматриваемом нерелятивистском случае нужно положить равным $5/3$.

В отличие от гидродинамического описания здесь как тепловая плазма, так и ускоренные частицы описываются единой функцией распределения, уравнения (5.63) — (5.65) совпадают с гидродинамическими уравнениями, они отражают непрерывность потоков вещества, импульса и энергии соответственно. Единственное отличие состоит в том, что в рамках гидродинамического подхода принято $j = 0$ и $P_{xx} = P = P_s + P_c$, поскольку анизотропией тепловых частиц пренебрегается, давление космических лучей считается изотропным, вклад космических лучей в уравнение баланса вещества считается малым по причине их незначительного количества.

Учитывая, что для быстрых частиц реализуется растущий с энергией коэффициент диффузии $\kappa = \tau v^2/3$, остановимся на наиболее простом с точки зрения вычислений случае постоянного τ . Тогда условие самосогласования (5.62) эквивалентно обращению в ноль плотности потока вещества j . Напомним, что поток j относится к локальной системе отсчета, поэтому условие $j = 0$ физически означает локальную изотропию углового распределения частиц плазмы.

Как уже отмечалось, для того чтобы последовательно описывать стационарный процесс ускорения сильной ударной волной, необходимо наличие в модели импульса обрезания p_m . При рассмотрении реальных ударных волн конечной протяженности параметр p_m возникает естественным образом. Однако эффекты, связанные с величиной p_m , можно описывать в рамках одномерной задачи, искусственно вводя в модель параметр p_m . Смысл его в этом случае состоит в том, что частицы с импульсами $p < p_m$ обычным образом переносятся в среде и по достижении импульса p_m покидают систему. Этот эффект можно включить в интеграл столкновений (5.60), записав его в модифицированной форме:

$$St f = \frac{\langle f \rangle}{\tau} \theta(p_m - p) - \frac{f}{\tau}. \quad (5.66)$$

Переход к интегралу столкновений в форме (5.66) несколько изменяет интегральные соотношения (5.63) — (5.65), которые с учетом условия (5.62) будут иметь вид:

$$\rho u = \rho_1 u_1 - j_m, \quad (5.67)$$

$$\rho u^2 + P_{xx} = \rho_1 u_1^2 + P_1 - q_m, \quad (5.68)$$

$$\frac{\rho u^3}{2} + F + u(P_{xx} + E) = \frac{\rho_1 u_1^3}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} u_1 P_1 - F_m, \quad (5.69)$$

где

$$j_m = \frac{4\pi m}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\langle \int_{p_m}^{\infty} f p^2 dp \right\rangle,$$

$$q_m = \frac{4\pi m}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\langle \int_{p_m}^{\infty} f (v u + u) p^2 dp \right\rangle,$$

$$F_m = \frac{4\pi m}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\langle \int_{p_m}^{\infty} f (v u + u) (v^2 + 2v u + u^2) p^2 dp \right\rangle$$

— поток вещества, импульса и энергии соответственно, уносимого из системы частицами, имеющими импульс $p > p_m$.

Таким образом, в соответствии с соотношениями (5.67) — (5.69) мы имеем ударную волну с высвечиванием. Такая модель соответствует рассмотренным в гл. 3 случаям реальных волн конечных размеров, где по достижении некоторого импульса p_m ускоренные ча-

стицы могут интенсивно покидать окрестность ударной волны. Заметим также, что соотношения (5.67) — (5.69) являются уравнениями баланса и имеют общий характер; их справедливость никоим образом не зависит от излагаемого здесь модельного подхода, основанного на использовании интеграла столкновений в форме (5.60), лишь только конкретный вид величин j_m , q_m и F_m является необходимым для данной модели.

Как и во всякой волне с высвечиванием, степень сжатия σ не только определяется числом Маха M_1 , но и зависит от значения потоков j_{m2} , q_{m2} , F_{m2} в области за ударным фронтом. Полагая в уравнениях (5.67) — (5.69) $x = \infty$, получим для степени сжатия $\sigma = u_1/u_2$ следующее выражение для больших импульсов обрезания $p_m \gg m u_1$, когда потоками вещества $j_m \sim \rho_1 u_1 (m u_1 / p_m)$ и импульса $q_m \sim \sim \rho_1 u_1^2 (m u_1 / p_m)$, уносимыми частицами, можно пренебречь [116, 160, 163, 164]:

$$\sigma = (\gamma_2 + 1) / \left[\gamma_2 \left(1 + \frac{1}{\gamma_1 M_1^2} \right) - \sqrt{\gamma_2^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma_1 M_1^2} \right)^2 + (\gamma_2^2 - 1) \left(\frac{2F_{m2}}{\rho_1 u_1^3} - 1 - \frac{2}{(\gamma_1 - 1) M_1^2} \right)} \right]. \quad (5.70)$$

Это выражение в силу отмеченной общности соотношений (5.67) — (5.69) справедливо в общем случае произвольных значений показателя адиабаты в области за (γ_2) и перед (γ_1) ударным фронтом.

19.3. Численное решение кинетического уравнения. Численное исследование структуры ударной волны на основе уравнения (5.61) удобно осуществлять, сведя его к интегральному уравнению [165, 166]:

$$f(x, p, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{x-x'}{(v\mu+u)\tau} \right]}{|v\mu+u|\tau} \theta \left(\frac{x-x'}{v\mu+u} \right) \theta(p_m - p_*) f(x', p_*) dx', \quad (5.71)$$

где

$$p_* = m \sqrt{v^2 + 2v\mu\Delta u + \Delta u^2},$$

$$\Delta u = u(x) - u(x'), \quad f(x, p) = \langle f(x, p, \mu) \rangle.$$

Профиль скорости плазмы, входящий в это уравнение, определяется из соотношения (5.68)

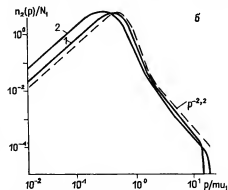
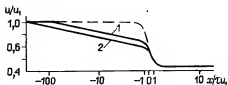
$$u(x) = u_1 - [P_{xx}(x) - P_1] / \rho_1 u_1, \quad (5.72)$$

где пренебрежено потерями импульса $q_m \sim \rho_1 u_1^2 (m u_1 / p_m)$, которые малы ($q_m \ll \rho_1 u_1^2$) при достаточно больших импульсах обрезания $p_m \gg m u_1$.

Задаваясь числом Маха M_1 , импульсом обрезания p_m и максвелловской функцией распределения частиц плазмы перед ударным

Рис. 5.4. Самосогласованный профиль скорости плазмы в ударной волне (а) и спектр частиц плазмы за ударным фронтом (б).

Кривые 1 соответствуют импульсу обрезания $p_m = 13\pi u_1$, 2 — $p_m = 21\pi u_1$; штриховые кривые — результаты несамосогласованного расчета.



фронтом $f_1(p)$, соответствующей давлению P_1 , и решая уравнение (5.71) совместно с (5.70), (5.72) методом итераций, можно определить самосогласованный профиль скорости $u(x)$ и функцию распределения $f(x, p, \mu)$ [165—167]. Аналогичная по своему физическому содержанию модель реализована на основе метода Монте-Карло [160—162, 164, 168, 169].

Характерные особенности самосогласованной структуры ударной волны показаны на рис. 5.4, где представлены результаты расчета [165—167] профиля скорости $u(x)$ и плотности частиц плазмы за ударным фронтом $n_2(p) = 4\pi p^2 f_2(p)$ волны с фиксированной степенью сжатия $\sigma = 3,5$, которая реализуется для числа Маха $M_1 = 4,58$, если пренебречь потоком энергии F_{m2} , уносимой частицами, покидающими систему. Как и при гидродинамическом описании, структура ударной волны характеризуется двумя пространственными масштабами. Протяженная область плавного изменения скорости $u(x)$ на длине $L \approx \kappa(p_m)/u_1$ — предфронт — обусловлена давлением быстрых ускоренных частиц со скоростями $v > u_1$, которые диффузионным путем внедряются в набегающий поток и тормозят его [158—175]. Степень модификации волны давлением быстрых частиц, которую можно характеризовать величиной перепада скорости плазмы на предфронте $(u_1 - u_s)/u_1$ и длиной L , возрастает с ростом импульса обрезания p_m . Это предотвращает чрезмерный рост давления ускоренных частиц и регулирует количество энергии, идущей на их ускорение.

Наряду с предфронтом имеется область резкого изменения скорости $u(x)$ — тепловой фронт. В отличие от гидродинамического случая здесь он имеет конечную толщину $l \sim t u_1$, на которой обеспечивается термализация основной доли частиц плазмы.

Самосогласованный спектр ускоренных частиц $n_2(p)$ уже не обладает универсальной формой во всем диапазоне импульсов $\pi u_1 \leq p \leq p_m$. Характер спектра обусловлен тем, что частицы с импульсами $p < p_m$ проникают в область предфронта на расстояние $x(p) \approx \kappa(p)/u_1 < L$. Тем самым они «ощущают» перепад скорости в ударной волне $\Delta u = u(x(p)) - u_2$. Поэтому если спектр ускорен-

ных частиц по-прежнему представлять в степенном виде $n \sim p^{-1}$, то показатель спектра будет функцией импульса

$$\gamma(p) = (\sigma_p + 2) / (\sigma_p - 1), \quad (5.73)$$

где $\sigma_p = u(x(p))/u_2$ — эффективная степень сжатия для частиц с импульсом p . Только спектр самых энергичных частиц с импульсами вблизи максимального p_m , для которых $\sigma_p \approx \sigma$, по форме близок к универсальному.

Плотность ускоренных частиц $n_2(p > mu_1)$ падает с ростом импульса обрезания p_m . При этом плотность энергии этих частиц

$$E_{c2} = \int_{mu_1}^{p_m} \epsilon n_2(p) dp \quad \text{остается приблизительно постоянной и составляет}$$

около половины всей внутренней энергии плазмы.

19.4. Особенности химического состава ускоренных частиц. Спектр примесных ионов, вклад которых в полное давление в плазме мал из-за малой их концентрации, может быть найден в линейном приближении с профилем скорости $u(x)$, определяемым давлением ионов основного сорта. Поскольку пробег до рассеяния быстрых частиц $\lambda = tv$ является растущей функцией жесткости $R = p/Ze$ (Ze — заряд иона), ионы с большим отношением массового числа A к зарядовому Z будут дальше проникать в область предфронта, вследствие чего их спектр как функция энергии на нуклон будет более пологим. Поэтому при распространении ударной волны в плазме, где примесные ионы ионизованы не полностью, спектр ускоренных частиц будет обогащаться ядрами тяжелых элементов [160, 161, 168, 170], что и наблюдается в эксперименте.

19.5. Эффективность регулярного ускорения при различных режимах инжекции. Количество энергии, идущей на ускорение, и определяемая ею степень модификации ударной волны, с одной стороны, зависят от темпа инжекции тепловых частиц в режим ускорения, а с другой — темп инжекции, заложенный в описанную модель (он характеризуется тем, что ускоряются около 1% частиц), не отражает многообразия возможностей, которые могут реализоваться в действительности.

Зависимость степени модификации ударной волны ускоренными частицами (космическими лучами) от задаваемого наперед темпа их инжекции на тепловом фронте [116] сравнительно просто исследовать на основе диффузионного уравнения переноса (2.2), справедливость которого в данном случае обеспечена достаточно большими размерами предфронта [158, 159, 171]. При этом удобно перейти от функции распределения к дифференциальному по логарифму кинетической энергии давлению космических лучей $\mathcal{P} = \frac{dP_c}{d \ln \epsilon}$. Учитывая связь этой величины с функцией распределения $\mathcal{P} = \frac{4\pi}{3} \epsilon p^3 f$, нетрудно преобразовать уравнение переноса к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u \mathcal{P}) + \frac{h\epsilon}{3} \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial \ln \epsilon} \left(\frac{\mathcal{P}}{\epsilon} \right) = 0, \quad (5.74)$$

где параметр $h = (\varepsilon + 2mc^2)/(\varepsilon + mc^2)$ меняется от $h = 1$ при $\varepsilon \gg mc^2$ до $h = 2$ при $\varepsilon \ll mc^2$. Для простоты можно принять

$$h = \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon > mc^2, \\ 2 & \text{при } \varepsilon < mc^2. \end{cases} \quad (5.75)$$

Другое приближение, которое позволяет существенно облегчить решение задачи, состоит в принятии пространственного распределения космических лучей в виде [163, 176—178]

$$\mathcal{P}(x, \varepsilon) = \mathcal{P}_2(\varepsilon) \theta[x + \bar{x}(\varepsilon)], \quad (5.76)$$

где $\bar{x}(\varepsilon)$ — средняя длина, на которую проникают частицы с энергией ε от теплового фронта в область предфронта. Это позволяет установить взаимно однозначное соответствие между x , u и ε и тем самым определить спектр космических лучей и профиль скорости плазмы в ударной волне. Хотя выражение (5.76) лишь приближенно описывает пространственное распределение ускоренных частиц перед ударным фронтом, с точки зрения рассматриваемой нелинейной задачи модификации ударной волны космическими лучами более важным является то, что в этом выражении отражена однозначная связь длины проникновения частиц в область предфронта с их энергией. В связи с этим следует ожидать, что справедливость принятого приближения (5.76) будет тем выше, чем лучше частицы с различными энергиями дифференцированы по длине проникновения. Поскольку средняя длина проникновения, или, что то же самое, диффузионная длина, определяется коэффициентом диффузии

$$\bar{x}(\varepsilon) \simeq \kappa_1(\varepsilon)/u(\bar{x}), \quad (5.77)$$

погрешность, вносимая пространственным распределением (5.76), будет наименьшей в случае быстро растущего с энергией коэффициента диффузии $\kappa_1(\varepsilon)$.

Уравнение (5.74) необходимо дополнить соотношениями, отражающими непрерывность потоков вещества и импульса (см. (5.67) и (5.68)):

$$\rho u = \rho_1 u_1, \quad (5.78)$$

$$\rho u^2 + P_g + P_c = \rho_1 u_1^2 + P_{g1}. \quad (5.79)$$

При этом, как обычно, считается, что космические лучи не вносят вклада в суммарную плотность среды ρ . Полное внутреннее давление в среде $P = P_g + P_c$, складывающееся из давления газа (тепловой плазмы) P_g и космических лучей P_c , принято изотропным, что оправдано в области предфронта. В этой области газ испытывает сжатие, которое сопровождается нагревом и, следовательно, ростом давления по адиабатическому закону

$$P_g = P_{g1} (u_1/u)^{\gamma_1}, \quad (5.80)$$

если принять, что показатель адиабаты газа остается неизменным.

Интегрируя уравнение (5.74) по $\ln \varepsilon$ в пределах от $\ln \varepsilon$ до $\ln \varepsilon_m$ и по x — от $-\infty$ до ∞ с помощью соотношений (5.76) — (5.80) и считая параметр h величиной постоянной, приходим к выражению для парциального давления космических лучей [163]

$$\mathcal{P}_2(u) = \left\{ \frac{\rho_1 u_1}{2} (u^2 - u_1^2) + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} P_{g1} \left(\frac{u_1}{u} \right)^{\gamma_1} (u - u_1) - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{3}{h} \right) u_2 \left[P_{g1} \left(\frac{u_1^{\gamma_1}}{u^{\gamma_1}} - 1 \right) + \rho_1 u_1 (u - u_1) \right] + F_{m2} \right\} / (u - u_2), \quad (5.81)$$

где $F_{m2} = (u_1 - u_2) \mathcal{P}_2(u_1)$ — поток энергии, уносимый из системы частицами, достигшими в процессе ускорения энергии обрезания ε_m .

Парциальное давление как функцию энергии получить нетрудно, если использовать вытекающую из соотношения (5.79) связь

$$\mathcal{P} d \ln \varepsilon = - \frac{dP_c}{du} du = \rho_1 u_1 (1 - M^{-2}) du,$$

где

$$M = \sqrt{\frac{\rho u^2}{\gamma_1 P_g}} = \sqrt{\frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma_1 P_{g1}} \left(\frac{u}{u_1} \right)^{\gamma_1 + 1}}$$

— локальное число Маха, что дает

$$\ln \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = \int_u^{u_1} \frac{\rho_1 u_1 (1 - M^{-2})}{\mathcal{P}_2(u)} du. \quad (5.82)$$

Если энергия обрезания ε_m является релятивистской ($\varepsilon_m \gg mc^2$), то эффективное значение показателя адиабаты γ_2 , входящее в выражение (5.70), будет определяться соотношением давления релятивистских $P_{c2}^{(r)}$ и нерелятивистских частиц $P_2 - P_{c2}^{(r)}$ за ударным фронтом:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} P_2 = \frac{5}{2} (P_2 - P_{c2}^{(r)}) + 4P_{c2}^{(r)}$$

(здесь приняты значения показателя адиабаты 5/3 и 4/3 для нерелятивистских и релятивистских частиц соответственно). Учитывая, что согласно (5.78) полное внутреннее давление среды за ударным фронтом составляет $P_2 = P_{g1} + \rho_1 u_1 (u_1 - u_2)$, получим

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho_1 u_1 (u_1 - u_r) + P_{g1} (1 - u_1^{\gamma_1} / u_r^{\gamma_1})}{\rho_1 u_1 (u_1 - u_2) + P_{g1}}, \quad (5.83)$$

где значение скорости u_r , которая в области предфронта разделяет релятивистские и нерелятивистские ускоренные частицы, опреде-

ляется из соотношения

$$\ln \frac{\varepsilon_m}{mc^2} = \int_{u_r}^{u_1} \frac{\rho_1 u_1 (1 - M^{-2})}{\mathcal{P}_2(u)} du, \quad (5.84)$$

в котором $h = 1$ (см. (5.75)).

При значении скорости u_r , разделяющем предфронт ($u_1 \geq u \geq u_r$) и тепловой фронт ($u_r \geq u \geq u_2$), спектр космических лучей необходимо сшить с тепловым

$$\mathcal{P}_2(\varepsilon_s) = \mathcal{P}_{inj}, \quad (5.85)$$

$$\ln \frac{mc^2}{\varepsilon_s} = \int_{u_s}^{u_r} \frac{\rho_1 u_1 (1 - M^{-2})}{\mathcal{P}_2(u)} du, \quad (5.86)$$

где \mathcal{P}_{inj} — парциальное давление той части тепловых частиц, которые после разогрева на тепловом фронте способны снова пересечь фронт и тем самым вступить в процесс ускорения; ε_s — их энергия; параметр h в соответствии с принятым приближением (5.75) здесь нужно положить равным 2, считая частицы теплового спектра нерелятивистскими. Энергия инжектируемых частиц ε , по порядку величины равна тепловой энергии частиц за ударным фронтом и может быть принята равной mu_s^2 .

Выражения (5.70), (5.80) — (5.86) позволяют при заданных значениях числа Маха M_1 , скорости ударного фронта u_1 , давления инъекции \mathcal{P}_{inj} и энергии обреза ε_m определить степень сжатия σ , парциальное давление космических лучей $\mathcal{P}_2(\varepsilon)$ (а следовательно, и спектр $n_2(\varepsilon) = 3\mathcal{P}_2(\varepsilon)/h\varepsilon$), а также долю внутренней энергии в ударной волне, приходящуюся на ускоренные частицы P_{cs}/P_2 либо на ускоренные релятивистские частицы $P_{cs}^{(r)}/P_2$.

Профиль скорости в ударной волне также можно рассчитать, если задаться определенным коэффициентом диффузии $\kappa(\varepsilon)$, что позволяет, используя связь (5.77), перейти от зависимости $u(\varepsilon)$, определяемой интегральным соотношением (5.82), к зависимости $u(x) = u(\bar{x}(\varepsilon))$. При этом, когда коэффициент диффузии κ достаточно быстро растет с энергией, результаты расчетов по формулам (5.76) — (5.86) хорошо согласуются с результатами точного решения уравнения (5.59). Последнее в области предфронта эквивалентно диффузионному уравнению переноса с коэффициентом диффузии $\kappa = \tau v^2/3$. Отмеченное совпадение результатов свидетельствует о правильности принятого приближения (5.76) [164].

Взаимосвязь эффективности ускорения с темпом инъекции показана на рис. 5.5, где изображено давление релятивистских ускоренных протонов $P_{cs}^{(r)}$ за фронтом сильной ударной волны в зависимости от давления инжектируемых частиц \mathcal{P}_{inj} , рассчитанное по формулам (5.70), (5.76) — (5.86) [116]. Видно, что давление $P_{cs}^{(r)}$ быстро нарастает с увеличением давления инъекции и при $\mathcal{P}_{inj} > 10^{-4} \rho_1 u_1^2$ на релятивистские частицы приходится существенная

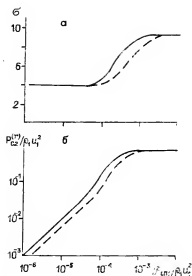


Рис. 5.5. Степень сжатия (а) и давление релятивистских частиц (б), ускоренных сильной ударной волной с числом Маха $M_1 = 10$ и скоростью фронта $u_1 = 3 \cdot 10^6$ м/с.

Сплошные кривые отвечают энергии обрезания $\epsilon_m = 10^{15}$, штриховые — $\epsilon_m = 10^{12}$ эВ.

часть ($\sim 50\%$) полного давления. В связи с этим имеет смысл говорить о двух режимах инжекции — насыщенном и ненасыщенном. Под насыщенным режимом понимается инжекция, обеспечивающая передачу части энергии ($\geq 10\%$) в ударной волне ускоренным частицам. В приведенном случае насыщенный режим соответствует давлению инжектированных частиц, большему чем $\mathcal{P}_{inj}^* = 10^{-4} \rho_1 u_1^2$. Давлению, меньшему \mathcal{P}_{inj}^* , соответствует ненасыщенный режим. Хотя определение величины \mathcal{P}_{inj}^* несколько условно, ее введение позволяет количественно сформулировать минимальное требование к механизму инжекции, выполнение которого обеспечивает высокую эффективность регулярного ускорения.

Важно отметить, что значение \mathcal{P}_{inj}^* (см. рис. 5.5) слабо зависит от энергии обрезания ϵ_m , что служит проявлением саморегулирующих свойств механизма ускорения. Эти свойства и смысл величины \mathcal{P}_{inj}^* проявляются также в том, что, после того как инжекция превысила уровень \mathcal{P}_{inj}^* , эффективность регулярного ускорения и степень модификации ударной волны практически не меняются. Именно данное обстоятельство и оправдывает название такого режима инжекции — насыщенный.

На рис. 5.6 приведена величина показателя спектра $\gamma = -d \ln n_2 / d \ln \epsilon$ в релятивистской области энергий для ударных волн с различными числами Маха [164]. Темп инжекции определялся тем, что спектр ускоренных частиц сшивался со спектром тепловых частиц, рассчитанным на основе уравнения (5.59). Это соот-

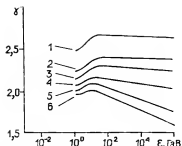


Рис. 5.6. Показатель самосогласованного дифференциального энергетического спектра ускоренных протонов в зависимости от кинетической энергии при энергии обрезания $\epsilon_m = 10^{15}$ эВ и числе Маха:

$M_1 = 2.5$ (1), 3 (2), 3.3 (3), 4 (4), 5 (5), 10 (6) [164].

ветствует парциальному давлению инжектируемых частиц [167] $\mathcal{P}_{inj} \simeq 10^{-2} \rho_1 u_1^2$, что обеспечивает насыщенный режим инжекции.

Из рисунка видно, что для чисел Маха $M_1 > 4$, которым соответствует степень сжатия $\sigma > 4$, показатель спектра существенно зависит от энергии, причем спектр имеет наиболее жесткий характер в области самых больших энергий $\epsilon \sim \epsilon_m$, где $\gamma < 2$. Парциальное давление \mathcal{P}_2 характеризуется наличием минимума в области $m c^2 < \epsilon < \epsilon_m$, что также нетрудно установить, анализируя, например, выражение (5.82). Умеренным числам Маха ($M_1 \simeq 3$) отвечает практически постоянный показатель спектра во всей области энергий $\epsilon > 10$ ГэВ (см. рис. 5.6). Эффективность ускорения растет с увеличением числа Маха, причем при $M_1 = 10$ релятивистские ускоренные частицы содержат половину полного внутреннего давления за ударным фронтом.

Таким образом, регулярный процесс ускорения характеризуется высокой эффективностью и саморегулирующими свойствами: в случае сильных ударных волн изменение темпа инжекции в широких пределах не приводит к заметному изменению количества энергии, передаваемой ускоренным частицам.

§ 20. РАСКАЧКА МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ОБЛАСТИ ПРЕДФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Развитие тех или иных плазменных неустойчивостей в окрестности ударного фронта является важным аспектом нелинейной задачи регулярного ускорения. Рост уровня возмущенности среды, обусловленный генерацией турбулентности, меняет условия распространения космических лучей, делает процесс их ускорения более эффективным.

Помимо рассмотренного в § 17 случая альфвеновских волн космические лучи вблизи ударного фронта могут порождать возмущения иных типов [117, 179—185]. Особое значение имеют крупномасштабные возмущения с характерными размерами вплоть до размера области их генерации — предфронта. Развитие таких возмущений значительно влияет на возможности ускорения наиболее высокоэнергичных частиц.

20.1. Дисперсионное уравнение. Анализ устойчивости предфронта выполним [117], исходя из системы уравнений двухжидкостной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.87)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla(P_g + P_c) + \frac{[[\nabla \mathbf{B}] \mathbf{B}]}{4\pi}, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) P_g + \gamma_g P_g \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial P_c}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) P_c + \gamma_c P_c \nabla \mathbf{u} = \nabla_i \kappa_{ij} \nabla_j P_c, \quad (5.90)$$

которая описывает самосогласованное взаимодействие газа (тепловой плазмы) и космических лучей с учетом регулярного магнитного поля \mathbf{B} , подчиняющегося уравнениям Максвелла:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c [\nabla \mathbf{B}]. \quad (5.91)$$

Будем считать выполненными условия «вмороженности», что для электрического поля дает

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{uB}]/c. \quad (5.92)$$

Основным отличием от использованной в § 18 системы гидродинамических уравнений является учет пондеромоторной силы $[[\nabla \mathbf{B}]\mathbf{B}]/4\pi$ в уравнении движения (5.88), которая из-за однородности регулярного магнитного поля \mathbf{B} никак не сказывается на стационарном решении системы (5.87) — (5.90) для плоской, параллельной ударной волны. Как и прежде, ограничимся рассмотрением только этого случая. Кроме того, здесь пренебрегается влиянием альфвеновской турбулентности, поскольку, как было установлено в § 17 и 18, энергетически ее вклад в уровень возмущенности среды для сильной ударной волны мал по сравнению с космическими лучами. Напомним, что этот вывод основан на использовании квазилинейного приближения, он может оказаться неправомерным в условиях сильно нелинейного режима генерации альфвеновской турбулентности.

Исследуем эволюцию возмущений $\delta(\rho, \mathbf{u}, P_s, P_c, \mathbf{B})$ с характерным пространственным масштабом $l < L \sim \kappa_{xx}/u_1$, для которых возможно использование ВКБ-приближения (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна). Основной интерес представляют возмущения, сопровождающиеся изменением плотности среды $\delta\rho$; для них $k_{\perp} u \neq 0$. Линеаризация системы уравнений (5.87) — (5.92) относительно малых гармонических возмущений $\delta(\rho, \mathbf{u}, P_s, P_c, \mathbf{B}) \sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ приводит к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} (\omega_u - iu_x) \left(\omega_u - \frac{c_a^2 k_{\parallel}^2}{\omega_u - iu_x} \right) &= u_x \left(\omega_u - \frac{c_a^2 k_{\parallel}^2}{\omega_u - iu_x} \right) \frac{ik_{\parallel} u + u_x}{\omega_u - iu_x} + \\ &+ \frac{ik_{\parallel}^2}{\omega_u - i\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 - i\kappa_{\perp} k_{\perp}^2 - i\gamma_c u_x} \left\{ \frac{u_x}{\omega_u - iu_x} \left(1 - \frac{c_s^2}{u^2} - \frac{c_c^2}{u^2} \right) \left[iu_x \left(u^2 - \frac{k_{\parallel}^2 u^2}{k^2} \right) - \right. \right. \\ &- k_{\parallel} c_a^2 u + \omega_u (\omega_u - iu_x) \frac{k_{\parallel} u}{k^2} \left. \right] + \left[c_c^2 - \frac{\alpha (i\gamma_c P_c u_x + iu P_{cx} - \kappa_{\parallel} k_{\parallel} P_{cx})}{\rho (\omega_u - iu_x)} \right] \times \\ &\times \left[u_x \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - u_x - i\omega_u + i \frac{\omega_u k_{\parallel}}{k^2 u} u_x - u_x \frac{c_a^2 k_{\parallel}}{u (\omega_u - iu_x)} \right] \left. \right\} + \\ &+ \frac{k_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega_u - i\gamma_c u_x} \left[\omega_u - iu_x - iu_x \frac{\omega_u k_{\parallel}}{k^2 u} + iu_x \frac{c_a^2 k_{\parallel}}{u (\omega_u - iu_x)} + \right. \\ &\left. + iu_x \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - \frac{c_a k_{\parallel}^2}{\omega_u - iu_x} + \frac{ic_a^2 k_{\parallel}^2}{\omega_u - iu_x} \right], \quad (5.93) \end{aligned}$$

где $\omega_u = \omega - ku$ — частота возмущения в локальной системе отсчета, связанной со средой; $F_x = dF/dx$; $c_s = \sqrt{\gamma_c P/\rho}$; тензор диффузии космических лучей в силу принятой ориентации магнитного поля диагонален, причем $\kappa_{xx} = \kappa_{\parallel}$, $\kappa_{yy} = \kappa_{zz} = \kappa_{\perp}$; κ_{\parallel} и κ_{\perp} — коэффициенты продольной и поперечной по отношению к магнитному полю диффузии космических лучей; параметр α отражает возможную связь величины коэффициентов диффузии с плотностью среды:

$$\kappa_{\parallel, \perp} \sim \rho^{-\alpha}. \quad (5.94)$$

Величины ρ , u , P_s , P_c , B , входящие в уравнение (5.93), отвечают стационарному решению уравнений (5.87) — (5.92) и являются функциями одной пространственной координаты x .

20.2. Инкремент неустойчивости. В отсутствие космических лучей, а следовательно, и предфронта решение уравнения (5.93) соответствует обычным магнитозвуковым волнам

$$\omega_u = \pm vk, \quad v^2 = \frac{1}{2} \left[c_s^2 + c_a^2 \pm \sqrt{(c_s^2 + c_a^2)^2 - 4c_s^2 c_a^2 k_{\parallel}^2 / k^2} \right]. \quad (5.95)$$

Для коротковолновых возмущений ($vk \gg |u_x|$), учитывая, что $\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2 \gg vk$, подставляя в уравнение (5.93) $\omega_u = \pm vk + \Delta\omega_u$ и ограничиваясь старшими членами в разложении по малым параметрам $\frac{\Delta\omega_u}{\omega_u}$, $\frac{u_x}{vk}$, $\frac{vk}{\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2}$, можно получить для мнимой части частоты $\Gamma = \text{Im } \omega_u$ выражение

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{c_s^2 k^2}{\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2} \frac{v^2 - c_a^2 k_{\parallel}^2 / k^2}{v^2 - c_a^2} + \frac{u_x}{2} \left[\pm \frac{u}{v} \frac{k_{\parallel}}{k} + 1 + \right. \\ & \left. + \gamma_g \frac{c_s^2}{v^2} \frac{v^2 - c_a^2 k_{\parallel}^2 / k^2}{v^2 - c_a^2} - \frac{c_s^2 (1 - k_{\parallel}^2 / k^2)}{v^2 - c_a^2} - \frac{c^2 k_{\parallel}}{vuk} \right] \pm \\ & \pm \frac{\alpha \kappa_{\parallel} k_{\parallel} k P_{cx}}{2\rho v (\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2)} \frac{v^2 - c_a^2 k_{\parallel}^2 / k^2}{v^2 - c_a^2}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Первый член в правой части этого выражения всегда положителен и описывает затухание возмущений, что обусловлено их диффузионным распылением. Второй и третий члены, при выборе соответствующих знаков, описывают рост амплитуды магнитозвуковых волн.

В одномерном случае ($k_{\perp} = 0$) выражение (5.96) дает неустойчивость звуковых волн $v = c_s$ [183—185]

$$\Gamma \simeq \frac{u_x}{2} \left(\frac{u}{c_s} + \gamma_g + 1 \right) - |\alpha| \frac{\kappa_{\parallel} P_{cx}}{2\rho}. \quad (5.97)$$

Отсюда видно, что величина инкремента для сильной ударной волны значительна: $|\Gamma| \sim u_1 M_1 / L$, так что произведение инкремента на время прохождения возмущением предфронта $\Delta t \simeq L/u_1$ велико:

$|\Gamma|\Delta t \simeq M_1 \gg 1$. Это означает, что амплитуда возмущений в области предфронта может достигать значительных величин.

Для альфвеновских волн $v = c_a$ выражение (5.96) неприменимо, поскольку величина $v^2 - c_a^2$, стоящая в знаменателе, в этом случае обращается в ноль. Однако, возвращаясь к дисперсионному соотношению (5.93), нетрудно показать, что эта ветвь затухающая.

Наиболее интересным и важным представляется общий случай распространения возмущений под углом к магнитному полю ($k_\perp \neq 0$). Он характерен тем, что при условии $\kappa_\parallel \gg \kappa_\perp$, которое для космических лучей весьма вероятно, инкремент неустойчивости возмущений с волновыми векторами $k_\parallel \ll k_\perp \ll k_\parallel \sqrt{\kappa_\parallel/\kappa_\perp}$ больше, чем в одномерном случае:

$$\Gamma \simeq -|\alpha| \frac{P_{ex}}{2\rho v} \frac{k}{k_\parallel} \left| \frac{v^2 - c_a^2 k_\parallel^2/k^2}{v^2 - c_a^2} \right|. \quad (5.98)$$

При этом затухание за счет диффузионного расплывания существенно не возрастает. Фактор k/k_\parallel может составлять $\sqrt{\kappa_\parallel/\kappa_\perp}$, что, в свою очередь, может быть значительно больше единицы. Фактор

$$\Phi = \frac{1}{v} \left| \frac{v^2 - c_a^2 k_\parallel^2/k^2}{v^2 - c_a^2} \right|,$$

входящий в это выражение, также меняется с изменением направления распространения возмущений. При продольном распространении он равен c_s^{-1} . Для быстрых магнитозвуковых волн этот фактор остается неизменным при произвольном направлении их распространения в случае слабого магнитного поля, когда $c_s \gg c_a$ и $v \simeq c_s$. Для сильного магнитного поля ($c_s \ll c_a$) и волн, распространяющихся под большим углом к магнитному полю, ($k_\perp \gg k_\parallel$) $v \simeq \sqrt{c_s^2 + c_a^2}$, и этот фактор $\Phi = c_a/c_s^2$ значительно больше, чем в одномерном случае.

Напомним, что по порядку величины $P_{ex} \sim P_{ex}/L \simeq P_{ex} u_1/\kappa_\parallel$, а в условиях насыщенной инжекции давление космических лучей за ударным фронтом составляет $P_{ex} \sim \rho_1 u_1^2$. Поэтому инкремент неустойчивости быстрых магнитозвуковых волн может достигать величины $\Gamma \sim -M_1 \sqrt{(\kappa_\parallel/\kappa_\perp)} \times (L/u_1)$ для слабого и $\Gamma \sim -M_1 \sqrt{\kappa_\parallel/\kappa_\perp} \times (L/u_1) (c_s/c_a)$ для сильного магнитного поля. В обоих случаях величина инкремента (по модулю) намного больше, чем для продольно распространяющихся возмущений (см. (5.97)).

Таким образом, в области предфронта наиболее быстрорастущими по амплитуде оказываются магнитозвуковые волны, распространяющиеся под углом к магнитному полю.

Неустойчивость, описываемая выражением (5.98), имеет вполне ясное физическое объяснение. Так, при $\alpha > 0$ локальное увеличение плотности среды $\delta\rho > 0$ сопровождается понижением коэффициента диффузии космических лучей $\delta\kappa < 0$, что, в свою очередь, ведет к уменьшению в этой области давления космических лучей

$\delta P_e < 0$. Невозмущенное давление космических лучей в окружающих областях обуславливает дополнительное сжатие, а следовательно, и нарастание возмущения δr . Конкретный вид связи χ и r для развития неустойчивости малосуществен. Наличие такой связи, что очень важно, представляется весьма вероятным из самых общих соображений: изменение плотности среды приводит к изменению напряженности хаотической компоненты магнитного поля, которая, в частности, может реализоваться в виде альфвеновской турбулентности, что меняет рассеивающие свойства среды, а следовательно, и коэффициенты диффузии космических лучей.

20.3. Возможная роль магнитозвуковых волн в генерации космических лучей предельно высокой энергии. Следует ожидать, что с развитием неустойчивости будет уменьшаться коэффициент диффузии космических лучей в области предфронта. Это обстоятельство имеет важное значение для генерации частиц предельно высоких энергий, поскольку эффективное ускорение космических лучей ударной волной конечного размера R осуществляется при выполнении условия (см. § 13) $Ru_1/\chi_{\parallel}(\epsilon) \geq 1$, откуда вытекает ограничение на максимальную энергию космических лучей ϵ_m : $Ru_1/\chi_{\parallel}(\epsilon_m) = 1$.

В связи с проблемой максимально достижимой энергии космических лучей обращает на себя внимание следующая особенность неустойчивости, описываемой выражением (5.98). Для волновых векторов с $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$, при которых инкремент максимален, развитие неустойчивости вызывает образование неоднородных структур, подобных магнитным пробкам — силовые трубки магнитного поля оказываются пережатыми, причем пробочное отношение $\eta = B_{\max}/B_{\min}$ равно амплитуде возмущения A .

Роль таких образований можно понять, если учесть, что универсальный вид формируемого ударной волной спектра космических лучей является следствием циклического характера процесса регулярного ускорения. После каждого цикла — двукратного пересечения частицами ударного фронта — их энергия увеличивается, причем каждый раз из процесса дальнейшего ускорения выбывает за счет конвективного сноса за ударным фронтом доля $4u_2/v$ от полного числа частиц, что обеспечивает универсальную степенную форму энергетического спектра. Если в области перед фронтом также происходит выбывание частиц из режима ускорения с некоторой вероятностью ΔP_1 в каждом цикле, то форма спектра останется неизменной только в случае выполнения условия $\Delta P_1 \ll 4u_2/c$. Частицы с энергией $\epsilon > \epsilon_m$, которые не ускоряются обычным образом, поскольку для них $\chi_{\parallel}(\epsilon) > Ru_1$, могут подвергаться дальнейшему ускорению за счет отражений магнитными пробками, образованными в области предфронта в результате развития неустойчивости. Для этого необходимо выполнение условия $\eta^{-1} \ll 4u_2/v$, поскольку через магнитную пробку проходит доля η^{-1} от полного числа падающих на нее частиц.

Поскольку отношение v/u_2 существенно превышает единицу, указанный механизм может реализоваться только при раскатке магнитозвуковых волн большой амплитуды $\delta B \gg B$. При этом ста-

новятся важными нелинейные эффекты, и вопрос о том, будет ли достигнут требуемый уровень неустойчивости, в рамках принятой здесь линейной теории остается открытым. Тем не менее можно ожидать, что в любом случае неустойчивость магнитозвуковых волн в области предфронта играет важную роль в структуре и динамике ударных волн.

§ 21. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотренные модели нелинейного процесса ускорения космических лучей позволили установить следующие важные особенности регулярного ускорения.

Во-первых, большая часть энергии ударной волны переходит в ускоренные частицы, в результате чего структура ударного фронта существенно трансформируется и возникает протяженный предфронт. В области предфронта возможна генерация неустойчивостей, имеющих гидродинамическую природу и обусловленных неоднородным истечением космических лучей наружу из окрестности фронта.

Во-вторых, энергетический спектр космических лучей становится неуниверсальным. Показатель степенного представления спектра приобретает зависимость от энергии и при высоких энергиях оказывается меньше 2, а значит, запасенная в космических лучах плотность энергии определяется главным образом частицами, имеющими энергию, близкую к максимальной. Формально это связано с расхождением на верхнем пределе интеграла, представляющего плотность энергии, что требует аккуратного учета факторов, ограничивающих энергию частиц сверху. Такие же процессы ведут к «высвечиванию» энергии ударной волной в форме убегающих быстрых частиц и, как следствие, к дальнейшей модификации структуры волны, в частности к возрастанию степени сжатия.

В-третьих, космические лучи могут генерировать альфвеновские волны в области предфронта, что уменьшает их коэффициент диффузии и снижает потери частиц, убегающих вперед от ударного фронта. При этом генерация альфвеновской турбулентности идет весьма эффективно, так что волны быстро становятся нелинейными, и их дальнейший рост не может быть описан квазилинейной теорией. В тех случаях, когда конкурирующие процессы типа нелинейного затухания Ландау не способны ограничить рост на уровне $\delta B/B \sim 1$, необходимо использовать полностью нелинейную теорию процесса генерации волн и ускорения частиц.

21.1. Исходные положения и соотношения. Попытаемся дать феноменологическую картину полностью нелинейного процесса регулярного ускорения в рамках модели трехкомпонентной среды с заданным законом взаимодействия между компонентами. Космические лучи, диффундирующие вперед от фронта, могут создавать «пластические» деформации силовых линий [65] вследствие частич-

ного «вмораживания» магнитного поля. Растягивание магнитных силовых трубок из-за относительного движения газа космических лучей и вещества, с одной стороны, и их запутывание турбулентными движениями — с другой, приводят к нарастанию магнитного поля, которое можно представить как результат взаимного «протаскивания» вещества и магнитного поля.

Рассмотрим трехкомпонентную среду, состоящую из газа (тепловой плазмы), космических лучей и «магнитной жидкости», каждая из которых характеризуется давлением P_g , P_c , P_m и эффективной скоростью u_g , u_c и u_m соответственно. Плотность ρ будем считать отличной от нуля только для газа. Из общих соображений ясно, что в равновесном состоянии в отсутствие градиентов все три скорости должны совпадать.

Различие скоростей должно быть связано с градиентами давлений. Вводя феноменологические величины κ_c и κ_m — эффективные коэффициенты диффузии космических лучей и магнитного поля, в одномерном случае можно записать

$$u_g - u_m = \frac{\kappa_m}{P_m} \left(\frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial P_c}{\partial x} \right), \quad (5.99)$$

$$u_m - u_c = \frac{\kappa_c}{P_c} \frac{\partial P_c}{\partial x}. \quad (5.100)$$

Смысл написанных соотношений достаточно прост. Относительное движение какой-либо из компонент относительно другой может возникать при наличии градиента ее собственного давления (движение в этом случае носит характер обычной диффузии), а также вследствие вынужденного воздействия со стороны другой компоненты в виде градиента ее давления.

Выражение для плотности потока энергии можно записать, пользуясь простым правилом, вытекающим из изложенного. Поток энергии каждой из компонент можно представить в виде суммы двух слагаемых $F = Eu_i + (E + P)u_0$, первое из которых связано с собственным движением со скоростью u_i , а второе — обусловлено вынужденным движением (со скоростью u_0). Нетрудно убедиться в том, что использованные в § 18 выражения (5.49), (5.51) и (5.53) для потоков энергии газа, космических лучей и альфвеновских волн удовлетворяют этому правилу, применяя которое и используя соотношения (5.99) и (5.100), нетрудно получить выражения для плотности потоков энергии всех трех компонент

$$F_g = \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} P_g u_g, \quad (5.101)$$

$$F_c = \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} P_c u_c + \kappa_c \frac{\partial P_c}{\partial x}, \quad (5.102)$$

$$F_m = \frac{\gamma_m}{\gamma_m - 1} P_m u_m + \kappa_m \frac{\partial P_m}{\partial x}, \quad (5.103)$$

В этих выражениях величины γ_i ($i = g, c, m$) — показатели адиабаты соответствующих компонент; они связывают между собой давление и плотность внутренней энергии: $P_i = (\gamma_i - 1)E_i$.

Вследствие взаимодействия между компонентами, которое приводит к обмену энергией, каждая из величин (5.101) — (5.103) не сохраняется, в то время как их сумма совместно с потоком энергии направленного движения газа $F_g + F_c + F_m + \rho u_g^2/2$ остается неизменной, не зависящей от координаты.

Учитывая, что изменение энергии каждой из компонент обусловлено работой приложенных к ней сил, нетрудно написать уравнения энергобаланса

$$\frac{\partial (F_g + \rho u_g^2/2)}{\partial x} = -u_g \left(\frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial P_c}{\partial x} \right), \quad (5.104)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial x} = u_m \frac{\partial P_c}{\partial x}, \quad (5.105)$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} = -u_m \frac{\partial P_c}{\partial x} + u_g \left(\frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial P_c}{\partial x} \right). \quad (5.106)$$

Уравнения (5.104) — (5.106) совместно с уравнением непрерывности потока вещества

$$\rho u_g = \rho_1 u_1 \quad (5.107)$$

и граничными условиями

$$u_g(-\infty) = u_1, \quad \sqrt{\frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma_g P_{g1}}} = M_1, \\ P_m(-\infty) = P_c(-\infty) = 0 \quad (5.108)$$

описывают плоскую ударную волну (в системе покоя фронта) в трехкомпонентной среде.

21.2. Сильная ударная волна, особенности спектра космических лучей. Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся случаем больших чисел Маха ($M_1 \gg 1$) и пренебрежем давлением газа P_g . Тогда уравнение (5.104) легко интегрируется, что с учетом (5.107) приводит к соотношению

$$\rho_1 u_1 u_g + P_m + P_c = \rho_1 u_1^2, \quad (5.109)$$

отражающему постоянство потока импульса.

Будем для определенности считать, что магнитное поле статистически изотропно, а космические лучи — релятивистские частицы. Это означает, что для показателей адиабаты следует принять значение $\gamma_c = \gamma_m = 4/3$.

Для анализа выписанных выше уравнений удобно перейти к новой переменной $u = u_g$ — скорости газа, которая в соответствии с (5.99) и (5.109) связана с координатой x соотношением

$$\kappa_m \frac{du}{dx} = -P_m(u - u_m). \quad (5.110)$$

Выражая давление в единицах $\rho_1 u_1^2$ и скорость в единицах u_1 , уравнения (5.105), (5.106) и (5.109) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} P_m u_m - P_m (u - u_m) \frac{\partial P_m}{\partial u} \right] = -u_m \frac{\partial P_c}{\partial u} - u, \quad (5.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} P_c u_m + \frac{u - u_m}{\gamma_c - 1} \frac{\gamma_c}{\gamma_m} P_m \frac{\partial P_c}{\partial u} \right] = u_m \frac{\partial P_c}{\partial u}, \quad (5.112)$$

$$u + P_m + P_c = 1. \quad (5.113)$$

Систему уравнений (5.110)–(5.113) можно решить, если задать вид функции $\kappa_m(u)$, или принять какое-либо иное дополнительное условие, определяющее эффективность генерации хаотического магнитного поля. Примем в качестве такого условия гипотезу о том, что механизм генерации обеспечивает равномерное распределение энергии магнитного поля и космических лучей. В оправдание гипотезы заметим, что деформации силовых трубок космическими лучами будут происходить до тех пор, пока магнитное давление не станет равным по порядку величины давлению космических лучей. При этом как давление, так и натяжение трубок станут препятствовать дальнейшим деформациям и прекратят рост поля.

Так как генерация поля ведет к тому, что скорость «магнитной жидкости» станет меньше, чем скорость вещества в области предфронта, представляет интерес исследовать влияние указанного эффекта на спектр ускоренных частиц. Рассмотрим поставленную проблему для частиц достаточно высоких энергий, суммарное давление которых мало по сравнению с динамическим давлением $\rho_1 u_1^2$. Для этого, как следует из § 19, достаточно исследовать решение в окрестности точки $u = 1$, что соответствует большим расстояниям от ударного фронта, где давление космических лучей определяется частицами предельно высоких энергий.

Интегрируя уравнения (5.111) и (5.112) от 1 до u и оставляя старшие по малой величине $1 - u \ll 1$ члены, приходим к соотношениям

$$F_m = (1 - u - P_c) \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} u_m + (u - u_m) \left(1 + \frac{\partial P_c}{\partial u} \right) \right],$$

$$F_c = u_m P_c,$$

$$\frac{F_m}{F_c} = \frac{1 - u - u_m P_c}{u_m P_c}.$$

Принимая условие равенства потоков энергии $F_m/F_c = 1$, получаем из этих уравнений совместно с соотношением (5.113) величину скорости «магнитной жидкости» на больших расстояниях от ударного фронта $u_m = u_m(-\infty) = 0,62$.

В случае, если давление газа остается пренебрежимо малым всюду (т. е. тепловой фронт отсутствует), скорость за ударным фронтом

$$u_2 = u_{m2} = \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c + 1} = \frac{1}{7}.$$

Показатель дифференциального спектра $n(p)$ космических лучей

$$\gamma = (\sigma_m + 2) / (\sigma_m - 1)$$

в области предельно высоких энергий определяется эффективной степенью сжатия $\sigma_m = u_{m1}/u_{m2}$, поскольку u_m — скорость рассеивающих центров. Подставляя в выражение для γ значения u_{m1} и u_{m2} , получаем $\gamma = 4, 9$.

Более вероятным, на наш взгляд, является случай полного равномерного распределения по энергии в области за ударным фронтом между всеми тремя компонентами: $P_{g2} = P_{e2} = P_{m2}$. Такому состоянию отвечает эффективный показатель адиабаты $\gamma_{ef} = 7/5$, что нетрудно установить, усреднив величину $\gamma/(\gamma - 1)$, входящую в выражение для плотности потока энергии. Соответствующее значение скорости за ударным фронтом $u_2 = u_{m2} = 1/6$ приводит к показателю спектра космических лучей $\gamma = 2, 1$.

Таким образом, генерация турбулентного магнитного поля в соответствии с гипотезой о равномерном распределении радикально меняет картину ускорения: спектр космических лучей даже в случае ударных волн с бесконечно большими числами Маха в области высоких энергий приобретает вид, близкий к универсальному. Заметим также, что в качестве гипотетического механизма генерации хаотического магнитного поля может выступать рассмотренная в § 20 неустойчивость предфронта относительно раскачки магнитозвуковых волн.

Вместе с тем значение полученных здесь результатов не следует переоценивать. Их строгое обоснование возможно лишь при выявлении и разработке детальной теории конкретного механизма генерации магнитного поля космическими лучами, который бы обладал достаточной эффективностью. Приведенный здесь анализ лишь показывает важность подобного рода исследований.

Глава 6

КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ НА ФРОНТАХ УДАРНЫХ ВОЛН

Открытие эффективного процесса ускорения, каковым, несомненно, является регулярное ускорение заряженных частиц ударными волнами, дало новый мощный импульс исследованию ряда важных проблем физики космических лучей и астрофизики высоких энер-

гий. Одна из них — проблема происхождения космических лучей. Несмотря на то, что создание полной всеобъемлющей теории регулярного ускорения далеко от завершения, развитые в последнее время модели этого процесса, хотя они и содержат тот или иной элемент феноменологизма, допускают содержательные количественные предсказания. Результаты многочисленных экспериментов, выполненных в межпланетном пространстве, дают возможность осуществлять детальную проверку развитых теоретических предсказаний и экстраполировать их на случай удаленных астрофизических объектов.

Прежде чем приступить к сопоставлению результатов теории и эксперимента, приведем краткий анализ физических условий, имеющих в космической плазме, с точки зрения возможности реализации процесса регулярного ускорения заряженных частиц.

§ 22. ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ РЕГУЛЯРНОГО УСКОРЕНИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Основным условием преобладающей роли процесса регулярного ускорения в формировании спектра быстрых частиц в той или иной области космического пространства, как явствует из § 9, является более высокий темп регулярного ускорения по сравнению с темпом конкурирующих процессов:

$$\tau_a^{-1} \gg \tau_i^{-1}. \quad (6.1)$$

Следует заметить, что если в качестве конкурирующего процесса рассматривать выход частиц из области ускорения или их энергетические потери, то условие (6.1) является необходимым для того, чтобы ускорение частиц было вообще возможным. Если же сопоставлять регулярное ускорение с процессами ускорения других типов, то выполнение условия (6.1) означает преобладающую роль регулярного ускорения.

22.1. Ограничения геометрического характера. Первыми среди всех возможных следует рассмотреть эффект выхода частиц из области ускорения вследствие конечности ее размеров R , а также адиабатическое замедление частиц в расширяющихся областях. Оба эти процесса характеризуются, как показано в гл. 3, временем $\tau_R \sim R/u_1$. Кроме того, для бегущих ударных волн условие (6.1) в этом случае является естественным требованием того, чтобы характерное время ускорения было меньше времени жизни системы (ударной волны). Учитывая, что согласно (2.45) характерное время ускорения $\tau_a \sim \kappa/u_1^2$, неравенство (6.1) примет вид условия

$$\kappa \ll Ru_1, \quad (6.2)$$

которому должен удовлетворять коэффициент диффузии частиц для того, чтобы они могли ускоряться ударной волной с размером R и скоростью фронта u_1 . Поскольку для быстрых частиц коэффициент диффузии реализуется как растущая функция их энергии, это усло-

вие ограничивает возможность регулярного ускорения частиц со стороны больших энергий.

Для межпланетного пространства характерными являются ударные волны с размерами $R=1-100$ а.е. и скоростями $u_1=10^5-10^6$ м/с [1]. В межзвездном пространстве основной интерес представляют крупномасштабные ударные волны от вспышек сверхновых звезд и стоячие ударные волны, ограничивающие зону действия звездных ветров звезд спектральных классов O и B . Для этих случаев $R=1-100$ пк, $u_1=10^5-10^7$ м/с [7, 30, 40, 186-188].

Что касается коэффициента диффузии частиц κ , то в области ускорения — вблизи ударного фронта — следует ожидать более низких значений κ , чем в окружающем пространстве, благодаря генерации плазменной турбулентности самими ускоряемыми частицами (см. гл. 5). Оставляя, однако, важный вопрос о максимально достижимой энергии частиц пока в стороне, будем ориентироваться на те средние значения коэффициентов диффузии космических лучей, которые дает эксперимент. В случае межпланетного пространства информацию о коэффициенте диффузии дают результаты экспериментов по распространению солнечных космических лучей [1-3], а для межзвездного пространства — результаты измерений химического состава галактических космических лучей [4-6]. Так, при энергиях $\epsilon \lesssim 1$ МэВ в районе орбиты Земли $\kappa \lesssim 10^{20}$ см²/с [1], а для частиц с энергией $\epsilon \lesssim 1$ ГэВ в среднем для диска Галактики $\kappa \lesssim 10^{27}$ см²/с [6, 189-191]. Отсюда можно заключить, что, по крайней мере для области начиная от тепловых до указанных выше энергий, необходимое условие для реализации регулярного ускорения выполнено как в межпланетном, так и в межзвездном пространстве.

22.2. Кулоновские потери. Не только электроны, но протоны и ядра более тяжелых элементов подвержены в плазме потерям энергии за счет кулоновских столкновений. Для релятивистских частиц кулоновские потери в космической среде малы и не играют существенной роли [4]. Потери могут оказаться значительными для частиц с энергией порядка тепловой энергии плазмы. Если инжекция частиц в режим ускорения происходит непосредственно из теплового распределения за ударным фронтом, то скорости инжектируемых частиц сравнимы со скоростью фронта u_1 . Она примерно в M_1 раз превышает тепловую скорость ионов перед ударным фронтом. Поэтому в случае сильной ударной волны, когда число Маха велико ($M_1 \gg 1$), в области перед ударным фронтом характерное время кулоновских потерь ионов, которые в основном будут обусловлены столкновениями с тепловыми электронами, можно определить по формуле [492]

$$\tau_q = \frac{3T^{3/2}m}{8\sqrt{2\pi m_e} Z^2 e^4 N L}, \quad (6.3)$$

где e , m_e — заряд и масса электрона, T и N — температура и концентрация электронов плазмы, L — кулоновский логарифм, m и Z — масса частицы и ее зарядовое число. Эта формула правильно описы-

вает потери энергии частиц, скорости которых превышают скорости тепловых ионов, но меньше скорости тепловых электронов.

Для протонов, которые являются основным сортом ионов в космической плазме, условие (6.1) с учетом (6.3) в случае межзвездной плазмы ($T = 3 \cdot 10^5$ К, $N = 3 \cdot 10^{-3}$ см $^{-3}$, $c_s = 2 \cdot 10^5$ м/с) переходит в неравенство $\kappa \ll M_1^2 10^{27}$ см 2 /с и в случае межпланетного пространства ($T = 10^5$ К, $N = 7$ см $^{-3}$, $c_s = 5 \cdot 10^4$ м/с) — $\kappa \ll M_1^2 10^{24}$ см 2 /с. Эти неравенства выполняются даже при энергиях частиц много выше тепловой (имеется в виду тепловая энергия $\varepsilon \sim m_1^2$ за ударным фронтом), поскольку для межзвездного пространства $\kappa \lesssim 10^{27}$ см 2 /с при энергии $\varepsilon \lesssim 1$ ГэВ, а в межпланетной среде $\kappa \lesssim 10^{20}$ см 2 /с при $\varepsilon \lesssim 1$ МэВ.

Сделать столь же определенные заключения относительно электронов затруднительно. В то время как все макроскопические параметры, определяющие состояние ионов за ударным фронтом, в частности их тепловая энергия, могут быть найдены из соотношений Ренкина — Гюгонио (1.5) — (1.8), остается не ясным, в какой степени на ударном фронте реализуются процессы термализации электронов [40]. Если на фронте бесстолкновительной ударной волны электроны набирают энергию, сравнимую с энергией протонов $m_p \mu_1^2$, в режим регулярного ускорения будут инжектироваться электроны, имеющие скорости в M_1 раз больше скоростей тепловых электронов перед ударным фронтом. В этом случае нетрудно показать, что при больших числах Маха ($M_1 \gg 1$) кулоновские потери энергии электронов также незначительны.

В области за фронтом сильной ударной волны температура среды значительно выше ($T_2 \sim M_1^2 T_1$), чем перед фронтом, что обеспечивает выполнение условия $\tau_a \ll \tau_q$. Этому способствует также то обстоятельство, что среда за ударным фронтом сильно возмущена, вследствие чего, по крайней мере для энергий, сравнимых с тепловой, $\kappa_2 < \kappa_1$.

Таким образом, в бесстолкновительной космической плазме имеется возможность осуществления безынежекционного режима регулярного ускорения. Отсутствие заметных потерь энергии позволяет ускорять частицы непосредственно от тепловых энергий, не требуя их предварительного доускорения.

22.3. Потери энергии на синхротронное излучение и комптоновское рассеяние. Для релятивистских электронов в космической среде важную роль играют потери энергии на синхротронное излучение и комптоновское их рассеяние на фотонах (главным образом на фотонах микроволнового реликтового излучения). Темп этих потерь растет с энергией по закону [4, 5]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32\pi c}{9} \left(\frac{\varepsilon^2}{m_e c^2} \right)^2 \left(E_\gamma + \frac{B^2}{8\pi} \right) \left(\frac{\varepsilon}{m_e c^2} \right)^2 \quad (6.4)$$

(E_γ — плотность энергии фотонов), если угловое распределение электронов близко к изотропному. Отсюда характерное время этого

процесса, если подставить численные значения констант, определяется выражением

$$\tau_c^{-1} = 8 \cdot 10^{-26} (E_\gamma + 6 \cdot 10^4 B^2 / 8\pi) \varepsilon, \quad (6.5)$$

где τ_c измеряется в секундах, энергия электрона ε — в электрон-вольтах, плотность энергии E_γ — в эВ \cdot см $^{-3}$, магнитное поле B — в гауссах.

Условие $\tau_a \ll \tau_c$ ограничивает спектр ускоряемых электронов со стороны высоких энергий [190]

$$\varepsilon \ll [8 \cdot 10^{-8} (E_\gamma + 6 \cdot 10^4 B^2 / 8\pi)]^{-1} u_1^2 / \kappa.$$

Если принять характерные для Галактики значения входящих сюда параметров: $B = 3 \cdot 10^{-6}$ Гс, $E_\gamma = 1$ эВ \cdot см $^{-3}$, $u_1 = 10^{19}$ см/с, $\kappa = 10^{27}$ см 2 /с, получим максимально достижимую электронами энергию $\varepsilon_m = 10^{16}$ эВ. В остатках сверхновых, где магнитное поле более сильное, синхротронные потери могут оказаться гораздо существеннее. Тем не менее возможности регулярного ускорения здесь электронов вплоть до энергий $\varepsilon = 10^{13} - 10^{14}$ эВ особых сомнений не вызывают [6, 193].

22.4. Альтернативные процессы ускорения. Как уже отмечалось, в окрестности ударного фронта, где интенсивно развиваются различные плазменные неустойчивости, реализуются благоприятные возможности статистического ускорения быстрых заряженных частиц.

Поскольку основным типом турбулентности, эффективно рассеивающей быстрые частицы, являются магнитогидродинамические волны, для темпа статистического ускорения можно записать (см. (2.87)): $\tau_s^{-1} \sim c_a^2 / \kappa$. Альфвеновская скорость как в межзвездной плазме, где $c_a \approx 2 \cdot 10^5$ м/с, так и в межпланетном пространстве, где $c_a \approx 4 \cdot 10^4$ м/с, близка по величине к скорости звука c_s . Поэтому соотношение темпов регулярного и статистического процессов ускорения $\tau_a / \tau_s \approx M_1^2$ определяется квадратом числа Маха. Отсюда вытекает, что в случае сильных ударных волн следует ожидать значительного преобладания регулярного ускорения быстрых частиц.

Таким образом, приведенный краткий анализ показал, что в космической плазме имеются благоприятные условия для реализации процесса регулярного ускорения заряженных частиц, причем ускорение может осуществляться начиная с тепловых энергий. Определение формы спектра ускоренных частиц требует детального рассмотрения процесса ускорения в конкретных условиях.

§ 23. УСКОРЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ МЕЖПЛАНЕТНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Результаты многочисленных измерений, выполненных в межпланетном пространстве [15, 16, 26, 194—211], показывают, что вблизи фронтов ударных волн практически всегда наблюдается повышение

интенсивности частиц сверхтепловых энергий. Согласно экспериментальным данным, форма энергетического спектра ускоренных частиц вблизи ударного фронта, как правило, описывается степенным законом $\epsilon^{-\gamma_e}$, а интенсивность частиц экспоненциально нарастает по мере приближения к фронту. Эти отмеченные особенности являются характерными для регулярного процесса ускорения. Исключения составляют явления возрастания интенсивности быстрых частиц, наблюдающиеся в узкой окрестности фронтов квазиперпендикулярных ударных волн. Эти события характеризуются мягким спектром, большой анизотропией и обусловлены ускорением частиц электрическим полем $E = -[uB]/c$ [43, 212, 213].

Заметим, однако, что выделение в спектре ускоренных частиц двух компонент и сопоставление их с разными механизмами ускорения имеет несколько условный характер. В действительности формирование всего спектра ускоряемых частиц можно рассматривать с единых позиций как результат регулярного процесса, носящего циклический характер [214]. При этом в достаточной мере адекватное описание достигается на основе диффузионного подхода, если использовать граничные условия общего вида (2.12), (2.13), учитывающие реальные изменения энергии частиц при пересечении и отражении их фронтом. Единственным «слабым местом» диффузионного способа описания является то, что он, строго говоря, неприменим в узкой окрестности ударного фронта. Указанная погрешность особенно велика в случае квазипоперечной ударной волны для частиц малых энергий, когда единичное взаимодействие с ударным фронтом значительно меняет спектр частиц и делает их распределение сильно анизотропным. Именно эти частицы и рассматриваются как отдельная фракция, хотя зачастую они имеют возможность, изотропизовавшись на некотором расстоянии от ударного фронта, продолжать ускорение, формируя тем самым спектр при более высоких энергиях.

Генерация энергичных заряженных частиц в межпланетном пространстве может осуществляться разными типами ударных волн.

23.1. Коротящие ударные волны. Одним из широко изучаемых типов межпланетных ударных волн являются коротящие ударные волны, которые образуются при взаимодействии быстрого и медленного потоков солнечного ветра [10, 75]. Подобная ситуация, когда взаимодействие быстрого потока, истекающего из локальной области Солнца, с обычным, спокойным солнечным ветром приводит к образованию пары ударных волн — прямой и обратной, схематически изображена на рис. 6.1 в системе отсчета, вращающейся вместе с Солнцем.

Пара ударных фронтов, которые образуются обычно на расстояниях нескольких астрономических единиц от Солнца, ограничивают так называемую коротящую область взаимодействия быстрого и медленного потоков. Коротящие области взаимодействия, как неоднократно установлено в экспериментах [200—206], являются источниками быстрых заряженных частиц, главным образом протонов и более тяжелых ионов, с энергией $\epsilon \lesssim 1$ МэВ/нуклон. Возра-

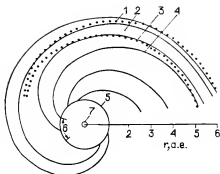


Рис. 6.1. Высокоскоростной поток в солнечном ветре:

1 — прямая ударная волна, 2 — коротярующая область взаимодействия, 3 — обратная ударная волна, 4 — силовые линии межпланетного магнитного поля, 5 — орбита Земли, 6 — область, занятая высокоскоростным потоком, 7 — Солнце.

стания интенсивности частиц, получившие название рекуррентных, в этой области энергии наблюдаются в высокоскоростных потоках и на меньших расстояниях от Солнца, в частности у орбиты Земли. Поскольку интенсивность рекуррентных возрастных растет в области расстояний до Солнца, равных 0,4—3,0 а. е., а также повышается интенсивность в непосредственной близости коротярующих ударных фронтов, представляется естественным предположение о том, что эти возрастания обусловлены регулярным ускорением частиц коротярующими ударными волнами.

Простейший, линейный, вариант теоретического описания, реализованный в работе [215], основан на диффузионном уравнении переноса (2.2). В стационарном случае для нерелятивистских частиц оно может быть записано в упрощенном виде:

$$\frac{1}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) v \frac{\partial f}{\partial v} = u \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad (6.6)$$

если предположить, что пространственная зависимость распределения ускоренных частиц в основном определяется радиальной координатой r . Оправданием для такого предположения может служить тот факт, что на больших расстояниях нормаль к ударным фронтам составляет малый угол с радиальным направлением. При этом нужно иметь в виду, что диффузионное распространение быстрых частиц в солнечном ветре осуществляется преимущественно вдоль силовых линий межпланетного магнитного поля, поскольку вследствие их сильной замагниченности коэффициент продольной по отношению к полю диффузии намного превышает коэффициент поперечной диффузии: $\kappa_{\parallel} \gg \kappa_{\perp}$. В силу этого радиальная диффузия связана с коэффициентом $\kappa_r = \kappa_{\parallel} \cos^2 \psi$, где ψ — угол между силовой линией межпланетного поля и радиальным направлением.

Сделанные предположения позволяют записать граничное условие (2.12) на ударном фронте в виде

$$\kappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} - \kappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\Delta u}{3} v \frac{\partial f_{1,2}}{\partial v} = 0, \quad (6.7)$$

где, как и прежде, индекс 1 указывает на область перед, а индекс 2 — на область за ударным фронтом, в нашем случае это ко-

ротирующая область взаимодействия между поверхностями двух ударных волн (см. рис. 6.1).

Несмотря на то, что уравнение (6.6), записанное в стационарном виде, относится к вращающейся вместе с Солнцем системе отсчета, азимутальная компонента скорости среды $u_\varphi = \Omega r \sin \theta$ (Ω — угловая скорость вращения Солнца, θ — полярный угол) в это уравнение, а также в граничное условие (6.7) не входит именно по причине предположенной сферической симметрии.

Для частиц с большим коэффициентом диффузии в области перед ударным фронтом ($\kappa_1 \gg Ru_1$) диффузия будет преобладать над конвекцией, что позволяет пренебречь членом $u \partial f / \partial r$ в уравнении переноса:

$$\frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) \frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} \right).$$

Решение этого уравнения перед ударным фронтом обратной ударной волны ($0 \leq r \leq R$), если принять коэффициент диффузии в форме

$$\kappa_1(r, v) = \kappa_0(v/v_0)(r/R) \quad (6.8)$$

и считать, что скорость солнечного ветра u_1 с расстоянием не меняется, можно представить следующим образом:

$$f_1(r, v) = A \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \exp \left[- \int \frac{3\kappa_0}{Ru_1 v_0} \alpha (\alpha + 2) dv \right],$$

где величины A и α являются функциями скорости частицы. Подстановка этого выражения в правую часть уравнения (6.6) позволяет учесть вклад конвективного члена $u_1 \partial f_1 / \partial r$, который оказывается пропорциональным величине g_1^{-1} :

$$f_1(r, v) = A \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \exp \left[- \int \frac{3\kappa_0}{Ru_1 v_0} \alpha (\alpha + 2) dv - \int \frac{3\alpha}{2v} dv \right]. \quad (6.9)$$

Граничное условие (6.7), если принять, что коэффициент диффузии частиц за ударным фронтом мал:

$$\kappa_2 \ll Ru_2 \quad (g_2 \gg 1),$$

даст

$$\alpha = 2\sigma/(\sigma - 1) + (v_0/v)(Ru_1/\kappa_0).$$

При этом функция распределения (6.9) принимает окончательный вид

$$f_1(r, v) = A \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1} + \frac{Ru_1 v_0}{\kappa_0 v}} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-\frac{3\sigma}{\sigma-1}} \exp \left[- \frac{6\sigma \kappa_0 v}{(\sigma-1) Ru_1 v_0} \right]. \quad (6.10)$$

Константа A в этом выражении определяется условием инжекции частиц в режим ускорения.

Таким образом, совместное действие регулярного ускорения на ударном фронте и адиабатического замедления в расширяю-

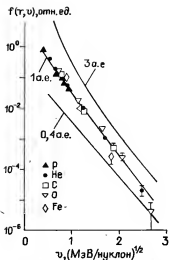


Рис. 6.2. Спектр ускоренных коротярующей ударной волной частиц на различных расстояниях от Солнца [215] и результаты измерений, выполненных у орбиты Земли [205].

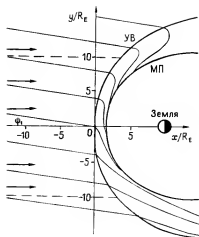


Рис. 6.3. Схематическая структура головной ударной волны, возникающей при обтекании магнитосферы Земли сверхзвуковым солнечным ветром.

Тонкими линиями показаны силовые линии межпланетного магнитного поля; МП — магнитопоза; УВ — фронт головной ударной волны; штриховые линии — граница области эффективного ускорения частиц.

щемся солнечном ветре формирует экспоненциальный спектр ускоренных частиц. Хотя в выражении (6.10) по-прежнему присутствует универсальный множитель $(v/v_0)^{-2\alpha/(\alpha-1)}$, тем не менее в силу принятого условия $\chi_i \gg Ru_i$ характер спектра в основном определяется экспонентой. Заметим, что именно мягкий, экспоненциальный характер спектра ускоренных частиц может служить оправданием использования линейного приближения, не учитывающего обратного влияния частиц на среду.

Принятый вид коэффициента диффузии быстрых частиц в солнечном ветре (6.8) не противоречит данным измерений [216], если пробег до рассеяния $\lambda_i = 3\chi_i/v$ у орбиты Земли ($r = 1$ а. е.) положить равным $1,6 \cdot 10^{12}$ см. Тогда условие $\chi_i \gg Ru_i$, если принять $R = 4$ а. е. и $u_i = 8 \cdot 10^5$ м/с (высокоскоростной поток), выполняется только для энергий $\epsilon > 1$ МэВ, следовательно, в области энергий $\epsilon \lesssim 1$ МэВ точность приближенного решения (6.10) может оказаться небольшой.

Точное численное решение уравнения (6.6) с граничными условиями (6.7) приведено на рис. 6.2, где в относительных единицах представлена функция распределения ускоренных частиц $f_i(r, v)$ в зависимости от скорости v для расстояний $r = 0,4; 1; 3$ а. е. На этом же рисунке нанесены экспериментальные результаты, полученные измерениями интенсивности протонов и ядер бо-

лее тяжелых элементов у орбиты Земли в области высокоскоростного потока 27 июня 1974 г. [205]. Из рисунка видно практически полное согласие между теорией и экспериментом по форме спектра ускоренных частиц. Кроме того, теория предсказывает десятикратный рост интенсивности частиц с энергией $\varepsilon \sim 1$ МэВ при увеличении расстояния от 0,4 до 1 а.е. и от 1 до 3 а.е., что также соответствует результатам наблюдений [202].

Таким образом, наблюдаемое явление возрастания интенсивности частиц с энергией несколько мегаэлектронвольт в высокоскоростных потоках солнечного ветра можно удовлетворительно объяснить в рамках модели регулярного ускорения частиц коротящими ударными волнами. В то же время отметим, что в научной литературе обсуждаются также альтернативные источники рекуррентных возрастаний [217].

23.2. Головная ударная волна. Большое количество измерений распределения быстрых частиц было выполнено в окрестности головной стоячей ударной волны [15, 194—199], образующейся при обтекании магнитосферы Земли сверхзвуковым солнечным ветром [10] (рис. 6.3). Здесь особенно четко в спектре ускоренных ионов ($\varepsilon > 3$ кэВ) выделяются две компоненты, которые характеризуются существенно различным пространственным распределением в области перед ударным фронтом.

Так называемые отраженные ионы наблюдаются в узкой окрестности ударного фронта. Их спектр характеризуется максимумом интенсивности при энергии $\varepsilon = 4\text{--}5$ кэВ и быстрым спадом при больших энергиях. Угловое распределение отраженных ионов резко анизотропно. Все перечисленные особенности отраженных ионов, как правило, удается понять, если рассматривать их как часть тепловых частиц солнечного ветра, испытавших отражение от ударного фронта из-за наклонной ориентации межпланетного магнитного поля по отношению к фронту.

Диффузионная компонента ($\varepsilon = 5\text{--}200$ кэВ) ускоренных ионов характеризуется значительно более жестким спектром и близким к изотропному угловым распределением. Перед ударным фронтом они занимают протяженную область, простирающуюся вплоть до расстояний $\sim 200R_E$ (R_E — радиус Земли) от ударного фронта.

Хотя, как уже отмечалось, различие между двумя компонентами ионов, скорее всего, условно, такое разделение в известной мере полезно. Оно позволяет трактовать отраженные ионы как конкретную реализацию механизма инжекции заряженных частиц в режим регулярного ускорения. Таким образом, диффузионная компонента, вероятно, представляет собой спектр частиц, ускоренных посредством регулярного процесса, в то время как отраженная компонента — спектр инжектируемых частиц [140, 162, 173, 218—221].

Как показывают результаты экспериментов [199, 222—224], диффузионная компонента ускоренных частиц практически всегда наблюдается на фоне гидродинамических волн большой амплитуды ($\delta B \sim B$). Вероятно, существует генетическая связь ускоренных частиц и гидродинамических волн в окрестности ударного

фронта, которая предсказывается квазилинейной теорией регулярного ускорения (см. § 17). Поскольку головная ударная волна — объект, достаточно хорошо изученный экспериментально, интересно детально сопоставить результаты теории и наблюдений, что было сделано в работе [140].

Задача описания процесса регулярного ускорения частиц головной ударной волной существенно упрощается, если принять во внимание следующее обстоятельство. По данным измерений [222], наиболее интенсивно ускорение частиц происходит вблизи квазипараллельной ударной волны, когда межпланетное магнитное поле B_1 составляет малый угол ($\psi_1 < 45^\circ$) с направлением скорости солнечного ветра u_1 . Основная физическая причина тому состоит в том [222], что ускоряемые частицы, будучи замагниченными, в случае квазиперпендикулярной ударной волны ($\psi_1 > 45^\circ$) быстро сносятся вместе с силовыми линиями магнитного поля из лобовой части волны, где условия для ускорения наиболее благоприятны. Сокращение времени пребывания частиц в лобовой части $t = 2a/(u_1 \operatorname{tg} \psi_1)$ с ростом угла ψ_1 обуславливает низкую эффективность процесса ускорения для квазиперпендикулярной волны. В связи с этим основной интерес представляет квазипараллельная волна, и ее можно считать аксиально-симметричной из-за малости угла ψ_1 .

Поскольку характерный масштаб изменения скорости солнечного ветра u_1 и межпланетного магнитного поля у орбиты Земли (~ 1 а.е.) намного превышает размер ударной волны ($a \approx 10 R_E$), можно считать течение плазмы и магнитное поле в ней однородными.

Ограниченность размеров ударной волны приводит к тому, что ускоряемые частицы, которые вследствие поперечной к магнитному полю диффузии попадают на силовые линии, находящиеся на расстоянии, большем a , от лобовой точки (см. рис. 6.3), можно считать выбывшими из процесса ускорения. Таким образом, поверхность цилиндра $\rho^2 = y^2 + z^2 = a^2$ является как бы поглощающей границей для ускоряемых ударной волной частиц.

С учетом сделанных замечаний в системе отсчета, которая связана с лобовой точкой ударной волны и ось X которой ориентирована от Солнца (т. е. по направлению скорости солнечного ветра u_1), уравнение переноса (5.26) для стационарных условий запишется по обе стороны ударного фронта в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \nabla_{\perp} \kappa_{\perp} \nabla_{\perp} f - (u - c_a) \frac{\partial f}{\partial x} + Q = 0 \quad (6.11)$$

с краевыми условиями

$$f(\rho = a, v) = 0, \quad f(x = -\infty, v) = 0. \quad (6.12)$$

Граничное условие на ударном фронте (2.24), если принять неоднократно использовавшееся ранее допущение о том, что в области за фронтом коэффициент диффузии частиц намного меньше,

чем перед ударным фронтом ($\kappa_{2\parallel} \ll \kappa_{1\parallel}$), запишется в виде

$$\kappa_{1\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{(\sigma - 1) u_1}{3\sigma} v \frac{\partial f_1}{\partial v} = Q_0, \quad (6.13)$$

где $\sigma = u_1/u_2$, Q_0 — сосредоточенный на ударном фронте источник частиц.

Пренебрежение диффузией частиц за ударным фронтом сводит задачу главным образом к отысканию функции распределения ускоренных частиц в области перед фронтом. Поэтому для сокращения в дальнейшем мы будем опускать у величин индексы 1 и 2, указывающие на их принадлежность к областям перед и за ударным фронтом соответственно.

Коэффициент продольной по отношению к магнитному полю диффузии в соответствии с работой [140] примем в виде

$$\kappa_{\parallel}(x, v) = \frac{1}{4\pi} \frac{v^2}{\omega_B} \frac{B^2/8\pi}{E_w(x, k = \omega_B/v)}, \quad (6.14)$$

который численным множителем отличается от выражения, полученного в § 17, где отмечалась причина возникновения такого рода различия.

Для коэффициента поперечной диффузии, как показывает детальный анализ [223], следует принять

$$\kappa_{\perp} = \rho_B^2 v / \lambda_{\parallel} = (\pi/4) \rho_B v E_w. \quad (6.15)$$

Это выражение соответствует тому, что в результате каждого акта рассеяния, который осуществляется в среднем через время $\tau = \lambda_{\parallel}/v$, частица смещается в направлении, перпендикулярном магнитному полю, на расстояние, равное гирорадиусу ρ_B .

В солнечном ветре $u_1/c_s \gtrsim 10$, поэтому альфвеновской скоростью c_s в уравнении (6.11) по сравнению со скоростью солнечного ветра u_1 можно пренебречь.

Решение уравнения (6.11), удовлетворяющее краевому условию (6.12), можно представить в виде

$$f(\rho, x, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, v) J_0(\xi_n \rho/a), \quad (6.16)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, ξ_n — значения ее аргумента, при которых она обращается в ноль. Соотношение между функциями Φ_n в конечном итоге определяется зависимостью мощности инжекции Q_0 от координаты ρ . Однако нетрудно видеть, что для произвольной функции $Q_0(\rho)$ первый член ($n=1$) в выражении (6.16) доминирует на больших расстояниях ($|x| \gg a$) от ударного фронта. Это позволяет пренебречь всеми членами в (6.16) кроме первого, что эквивалентно задаче отыскания функции распределения ускоренных частиц $f(\rho, x, v)$ при $\rho=0$, поскольку $f(0, x, v) = \Phi_1(x, v)$.

Функция $f(x, v) = f(0, x, v)$, как нетрудно видеть, удовлет-

воряет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \kappa_{\perp} (\xi_1/a)^2 f - u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Q = 0.$$

Принимая моноэнергетический источник частиц

$$Q = Q_0 \delta(x) = u_1 \frac{N_0}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0) \delta(x),$$

нетрудно получить решение этого уравнения, которое с учетом граничного условия (6.13) имеет вид:

$$f(x, v) = \frac{N_0}{4\pi v_0^2} q \exp \left\{ -q \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} [1 + A(v)] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^x \frac{u_1}{\kappa_{\parallel}} [1 + A(v)] dx \right\} \theta(v - v_0), \quad (6.17)$$

где $q = 3\sigma/(\sigma - 1)$, $A = [V 1 + (4\kappa_{\parallel} \kappa_{\perp}/u_1^2) (\xi_1/a)^2 - 1]/2$. Решение (6.17) удовлетворяет краевому условию $f(x = -\infty, v) = 0$, только если

$$\int_0^x E_w(x, v) dx \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

В солнечном ветре это обеспечивается главным образом за счет наличия в плазме солнечного ветра достаточно высокого уровня альфвеновской турбулентности $E_{w0}(v) = E_w(-\infty, v)$.

Решение (6.17) имеет простую структуру, особенно в непосредственной близости от ударного фронта ($x = 0$), где оно оказывается не зависящим от спектра турбулентности $E_w(x, v)$, поскольку согласно (6.13) и (6.14) фактор $\kappa_{\parallel} \kappa_{\perp} = 3\rho_B^2 v^2$ не зависит от турбулентного поля [173]. Для области скоростей частиц, где выполняется условие их сильной модуляции ($\kappa_{\parallel} \kappa_{\perp}/(au_1)^2 \ll 1$), параметр A мал ($\ll 1$) и спектр ускоренных частиц имеет универсальный вид:

$$f(0, v) = \frac{N_0}{4\pi v_0^2} q \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-q}, \quad q = \frac{3\sigma}{\sigma - 1}.$$

В той области скоростей, где $A \gtrsim 1$, спектр значительно более крутой:

$$f(0, v) = \frac{N_0}{4\pi v_0^2} q \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-q/2} \exp \left(-\frac{v^2}{v_*^2} \right), \quad v \gtrsim v_*, \quad (6.18)$$

где

$$v_* = V \frac{2(\sigma - 1) \omega_B a u_1}{\sqrt{3} \sigma \xi_1}. \quad (6.19)$$

Укручение спектра в области больших энергий, как видно отсюда, связано с выбыванием частиц из режима ускорения за счет их диффузионного выхода через боковую цилиндрическую поверхность $\rho = a$, охватывающую область ускорения.

Примечательная особенность спектра (6.18) состоит в том, что его форма одинакова для любого сорта ионов, если их энергию относить к зарядовому числу Z . Определяющим фактором в спектре (6.18) является экспонента $\exp(-\varepsilon/Z\varepsilon_*)$, в которой характерная энергия

$$\varepsilon_* = \frac{mv_*^2}{2Z} = \frac{(\sigma - 1) au_1 eB}{\sqrt{3} \sigma \varepsilon_1 c}$$

не зависит от сорта частиц, т. е. от их массы m и заряда Ze . Именно такого рода спектр наблюдается у энергичных ионов вблизи головной ударной волны. Принимая средние значения параметров солнечного ветра $u_1 = 4 \cdot 10^5$ м/с, $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Гс, $\sigma = 3,4$, находим, что наблюдаемым размерам головной ударной волны $a = 6,9 - 11,6 R_\odot$ отвечает диапазон характерных энергий протонов $\varepsilon_* = 15 - 25$ кэВ, что хорошо согласуется с экспериментом [196].

Пространственное распределение ускоренных частиц согласно (6.17) определяется распределением турбулентного поля $E_w(x, v)$. При этом нужно учесть, что в отличие от случая, рассмотренного в § 17, здесь помимо волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси $X(E_w^-)$, имеются волны, распространяющиеся от Солнца по оси $X(E_w^+)$. Стационарное распределение плотности энергии этих волн подчиняется уравнению

$$(u \mp ca) \frac{\partial E^\mp}{\partial x} = -2\Gamma_\mp E^\mp \quad (6.20)$$

с краевыми условиями

$$E_w^\pm(-\infty, v) = E_{w0}^\pm(v),$$

которые определяются состоянием турбулентного поля E_{w0}^\pm в невозмущенном солнечном ветре.

Заметим, что поляризация волн явным образом не входит в уравнения вследствие предположения о том, что волны с поляризацией разных типов (лево- и правоциркулярная) генерируются в невозмущенном солнечном ветре с одинаковой интенсивностью.

Учитывая, что в используемом нами диффузионном подходе функция распределения быстрых частиц имеет вид

$$f(x, v, \mu) = f(x, v) + f_x(x, v)\mu,$$

где первый момент в системе отсчета, связанной со средой в соответствии с (2.3), дается формулой $f_x = -(3\kappa_\parallel/v) \partial f / \partial x$, выражение (5.21) для инкремента нарастания альфвеновских волн с учетом

направления волнового вектора \mathbf{k} можно записать так:

$$\Gamma_{\pm} = \pm \frac{6\pi^3 c_a}{k c^2} \sum_s \frac{(Z_s e)^2}{m_s} \int_{\omega_B/k}^{\infty} dv v \left(1 - \frac{\omega_B^2}{k^2 v^2} \right) \kappa_{\parallel} \frac{\partial f_s}{\partial x}. \quad (6.21)$$

Суммирование здесь производится по сортам частиц, причем помимо величин, помеченных индексом суммирования s , от сорта частиц зависят также значения параметров ω_B и κ_{\parallel} , у которых индекс s для краткости опущен. Интегрирование в (6.21) можно выполнить приближенно, считая, что скорость $v = \omega_B/k$ достаточно велика ($\geq v_*$) и форма спектра частиц описывается выражением (6.18):

$$\Gamma_{\pm} = \pm \sum_s \frac{6\pi^3 c_a \omega_B^2 (Z_s e)^2}{m_s c^3 k^3} \left(\kappa_{\parallel} \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \times \\ \times \int_1^{\infty} dy y^{-\frac{3\sigma-6}{2(\sigma-1)}} (1 - y^{-2}) \exp[-\beta(y^2 - 1)],$$

где $\beta = (\omega_B/k)^2/v_*^2$, а величины κ_{\parallel} и f_s берутся при $v = \omega_B/k$. Заметим, что использование выражения (6.18) для функции распределения частиц правомочно только при не слишком больших расстояниях от ударного фронта: для расстояний от фронта, где показатель второй экспоненты в выражении (6.17) порядка или больше единицы, становится существенной пространственная зависимость функции распределения частиц, которой мы с целью упрощения пренебрегли. Отсюда, сохраняя старшие члены по малой величине $1/\beta < 1$, получим

$$\Gamma_{\pm} \simeq \pm \frac{u_1}{2} \sum_s \frac{\alpha_s(k)}{E_w(x, k)} \frac{\partial f_s}{\partial x}, \quad (6.22)$$

где

$$\alpha_s(k) = \frac{6\pi^3 v_*^4 c_a (Z_s e)^2 k \kappa_{\parallel}(x, \omega_B/k) E_w(x, k)}{u_1 c^3 \omega_B^2}. \quad (6.23)$$

Важно отметить, что величина α_s не зависит от координаты x .

Подставляя выражение (6.22) в соотношение (6.20) и выполняя интегрирование по x , имеем

$$E_w^{\pm}(x, k) = \frac{1}{2} \left[\mp \left(\sum_s \alpha_s(k) f_s(x, \omega_B/k) + E_{w0}^-(k) - E_{w0}^+(k) \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\sum_s \alpha_s(k) f_s(x, \omega_B/k) + E_{w0}^-(k) - E_{w0}^+(k) \right)^2 + 4 E_{w0}^-(k) E_{w0}^+(k)} \right], \quad (6.24)$$

Учитывая, что в невозмущенном солнечном ветре турбулентность представляет собой альфвеновские волны, распространяющие-

ся в направлении от Солнца — $E_{w0}^- \ll E_{w0}^+$, — о чем свидетельствует эксперимент, из соотношения (6.24) можно получить

$$\left. \begin{aligned} E_{w0}^- &\simeq \sum_s \alpha_s f_s - E_w^+ \\ E_w^+ &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } \sum_s \alpha_s f_s > E_{w0}^+,$$

$$\left. \begin{aligned} E_{w0}^- &= 0 \\ E_w^+ &\simeq E_{w0}^+ - \sum_s \alpha_s f_s \end{aligned} \right\} \text{ при } \sum_s \alpha_s f_s < E_{w0}^+.$$

Эти соотношения показывают, что вблизи ударной волны спектр турбулентности солнечного ветра остается неизменным в той области длин волн, где отсутствует резонансное взаимодействие с ускоренными частицами, а в той области, где осуществляется такое взаимодействие, возможно существенное изменение характера спектра. Волны, распространяющиеся в направлении от Солнца (относительно плазмы солнечного ветра), затухают, интенсивность волн, движущихся к Солнцу, нарастает, причем в области пространства, где количество ускоренных частиц достаточно велико, так что $\sum_s \alpha_s f_s > E_{w0}^+$, интенсивность волн, распространяющихся от Солнца, практически полностью подавлена.

Поскольку динамика альфвеновских волн определяется их резонансным взаимодействием с частицами, осуществляемым при условии $v = \omega_B/k$, спектр турбулентности при достаточно малых волновых числах k будет определяться вкладом ионов более тяжелых, чем протоны. В условиях солнечного ветра можно ограничиться учетом вклада ионов гелия, пренебрегая вкладом более тяжелых элементов по причине их незначительного количества.

Выражение (6.24) для коротковолновой части спектра альфвеновской турбулентности, когда $k > \omega_B/v_0$, неприменимо. Для этих волн резонансная скорость $v = \omega_B/k$ оказывается меньшей скорости инжектируемых частиц v_0 . Поскольку в спектре ускоренных частиц (6.17) отсутствуют частицы со скоростями $v < v_0$, интегрирование в выражении (6.21) нужно осуществлять не от значения $v = \omega_B/k$, а от $v = v_0$. Пренебрегая величиной $(\omega_B/kv)^2$ по сравнению с единицей в этом выражении и учитывая только вклад протонов, (6.21) можно записать так:

$$\Gamma_{\pm} = \pm \frac{6\pi^3 u c_a e^2}{m_p c^2 k} \int_{v_0}^{\infty} dv v [1 + A(v)] f_p(x, v). \quad (6.25)$$

Записывая решение уравнения (6.20) в виде

$$E_w^{\pm}(x, k) = E_{w0}^{\pm}(k) \exp \left[\frac{2}{u_1} \int_x^{\infty} \Gamma_{\pm}(x, k) dx \right] \quad (6.26)$$

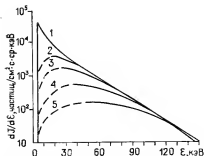


Рис. 6.4. Дифференциальная интенсивность ускоренных головной ударной волной протонов в зависимости от кинетической энергии для расстояний от ударного фронта: $x/R_E = 0$ (1), -2 (2), -7 (3), -40 (4), -200 (5) [140].

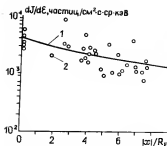


Рис. 6.5. Интенсивность ускоренных головной ударной волной протонов с энергией 30 кэВ в зависимости от расстояния до ударного фронта [140].
1 — расчет [140], 2 — экспериментальные значения [196].

и учитывая, что согласно (6.25) $|\Gamma_{\pm}| \sim k^{-1}$, нетрудно убедиться в том, что в области $k \gg \omega_B/v_0$ при увеличении волнового числа плотность энергии волн $E_w = E_w^+ + E_w^-$ сначала будет существенно падать (с учетом того, что $E_{w0}^- \ll E_{w0}^+$), а затем при дальнейшем увеличении поднимется до уровня невозмущенной среды E_{w0}^+ .

Выражения (6.17), (6.24) и (6.26) дают решение самосогласованной задачи регулярного ускорения частиц головной ударной волной. Подставляя в указанные выражения значения параметров, полученные из наблюдений [25], можно сравнить теоретические и экспериментально измеренные спектры ускоренных частиц и альфеновских волн. Для солнечного ветра характерными являются $u_1 = 4 \cdot 10^3$ м/с, $c_a = 4 \cdot 10^4$ м/с, $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. Типичный размер головной ударной волны составляет $a = 10 R_E$, степень сжатия вещества на ударном фронте $\sigma = 3.5$. Поскольку инжектируемыми в режим ускорения частицами являются отраженные ионы, средняя энергия которых составляет 5 кэВ/нуклон, следует принять $v_0 = 9.8 \cdot 10^5$ м/с. Нормировку функции распределения $f_i(x, v)$ (или определение величины N_0) можно произвести, если учесть статистику измерений интенсивности ускоренных частиц вблизи ударного фронта при энергии 30 кэВ/Z [196]: $f_p(x=0; 2.4 \cdot 10^6$ м/с) $= 7.3 \cdot 10^{-29}$ частиц \cdot см $^{-6} \cdot$ с 3 , $f_{He}(x=0; 1.7 \cdot 10^6$ м/с) $= 2.0 \cdot 10^{-29}$ частиц \cdot см $^{-6} \cdot$ с 3 . Спектр альфеновских волн (плотность энергии на единичный интервал волновых чисел), соответствующий наблюдениям [224], имеет вид $E_{w0}^+(k)/k = 2.6 \cdot 10^{-18} (1.57/k)^{3/2}$ Гс $^2 \cdot$ см, или, если вместо волнового числа использовать частоту $\nu = ku/2\pi$, плотность энергии на единичный интервал частот $E_{w0}^+(\nu) = 4 \cdot 10^{-13} \times (0.4/\nu)^{3/2}$ Гс 2 /Гц.

В качестве примера на рис. 6.4 представлены результаты расчета интенсивности ускоренных протонов

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{v^2}{m_p} f_p(x, v)$$

в зависимости от их кинетической энергии ε для ряда значений расстояния $|x|$ в области перед ударным фронтом ($x < 0$). Характерной особенностью спектра $dJ/d\varepsilon$ при фиксированном значении x является наличие в нем максимума при некотором значении $\varepsilon(x)$, что легко понять на основе выражения (6.17). Для энергий $\varepsilon > \varepsilon(x)$ показатель второй экспоненты в выражении (6.17) мал по абсолютной величине и спектр частиц близок к спектру на ударной волне ($x = 0$). При энергиях $\varepsilon < \varepsilon(x)$ интенсивность частиц в значительной мере определяется второй экспонентой в выражении (6.17), отражающей уменьшение интенсивности с увеличением расстояния от фронта при фиксированной энергии ε . Влияние этого фактора растет с уменьшением энергии, поскольку коэффициент диффузии при этом уменьшается, что и приводит к образованию максимума в спектре $dJ/d\varepsilon$ при конечном значении расстояния до фронта $|x|$. Участки кривых на рис. 6.4, отвечающие области энергии $\varepsilon < \varepsilon(x)$ и изображенные штриховыми линиями, отражают тот факт, что использованное при получении выражения (6.22) предположение о спадаании функции распределения частиц с ростом их скорости в этой области нарушено. Тем не менее решение остается при этом качественно правильным.

Результаты пространственного распределения ускоренных протонов с энергией 30 кэВ в сравнении с данными эксперимента [196] приведены на рис. 6.5, где изображена интенсивность протонов в зависимости от расстояния до ударного фронта $|x|$ в области перед фронтом ($x < 0$). Рисунок показывает хорошее согласие теории и эксперимента.

Результаты расчета спектра альфвеновских волн $E_w(x, v)$ для расстояний $x = 0$ и $x = -2R_E$ представлены на рис. 6.6. Участок этих кривых, изображенный точками, соответствует волновым числам $k \geq \omega_B/v_0$ и схематически показывает уменьшение интенсивности волн с ростом k и затем восстановление E_w до уровня E_{w0}^+ . На этом же рисунке представлены результаты измерений спектра E_w вблизи ударного фронта [224]. Точно определить

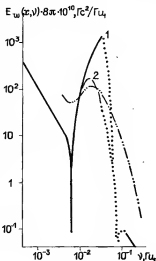


Рис. 6.6. Спектр альфвеновских волн для расстояний $x = 0$ (1) и $x = -2R_E$ (2) от фронта головной ударной волны [140]. Штрихпунктирная кривая — результаты измерений [224].

расстояние до ударного фронта в процессе измерений не представляется возможным, поэтому данные измерений сравниваются с расчетными для двух значений расстояний x . Наблюдаются качественное согласие теории и эксперимента во всей области частот, а также совпадение значений спектра в районе частоты $\nu = 2-3 \cdot 10^{-3}$ Гц, при которой имеет место максимум. Количественное различие в области как более низких ($\nu < 10^{-2}$ Гц), так и более высоких ($\nu \gtrsim 10^{-1}$ Гц) частот, возможно, связано с нелинейным взаимодействием волн, не учитываемым квазилинейной теорией. В пользу такого предположения говорит тот факт, что амплитуда альфвеновских волн сравнима с напряженностью регулярного межпланетного поля.

Предсказываемая теорией плотность энергии протонов с энергией $\varepsilon > 15$ кэВ $E_\varepsilon = 2,1 \cdot 10^3$ эВ \cdot см $^{-3}$ и альфвеновских волн $E_w = \int E_w(k) d \ln k = 25$ эВ \cdot см $^{-3}$ находится в хорошем согласии с экспериментом, который дает $E_\varepsilon(\varepsilon > 15 \text{ кэВ}) = 200$ эВ \cdot см $^{-3}$ [228] и $E_w = 30$ эВ \cdot см $^{-3}$. Энергия всех ускоренных частиц составляет $E_\varepsilon(\varepsilon > 5 \text{ кэВ}) = 350$ эВ \cdot см $^{-3}$.

В рамках изложенной квазилинейной теории не учитываются воздействия ускоренных частиц на структуру течения плазмы в ударной волне. Иными словами, теория является линейной по давлению частиц. Однако на ускоренные частицы, несмотря на весьма небольшие размеры ударной волны, приходится заметная часть полной энергии в ударной волне. Поэтому возможна значительная модификация ударной волны ускоренными частицами, в частности образование предфронта. Ожидаемую степень модификации нетрудно оценить из уравнения (1.6а) непрерывности потока импульса. В точке u_* , разграничивающей предфронт ($u_* \leq u \leq u_1$) и тепловой фронт ($u_2 \leq u \leq u_3$), уравнение дает

$$\frac{u_1 - u_*}{u_1} = \frac{2}{3} \frac{E_\varepsilon}{\rho_1 u_1^2} = 0,12.$$

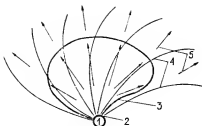
Отсюда следует, что в пределах предфронта скорость солнечного ветра должна понизиться на величину $u_1 - u_* \simeq 5 \cdot 10^4$ м/с, что удовлетворительно согласуется с результатами измерений [229]. Заметим также, что цифра, близкая к этой, получается в кинетической модели регулярного ускорения [160, 162].

Таким образом, многочисленные детальные измерения, относящиеся к явлению генерации быстрых заряженных частиц и гидродинамической турбулентности вблизи головной ударной волны, удастся правильно понять на основе теории регулярного ускорения.

23.3. Ударные волны от солнечных вспышек. Большая часть ударных волн в межпланетном пространстве имеет нестационарный характер. Они образуются во время солнечных вспышек, представляющих собой взрывоподобный процесс в локальной области хромосферы Солнца, сопровождающийся выбросом в окружающее пространство массы горячей плазмы [10]. Скорость выброшенной плазмы, как правило, намного превышает скорость спокойного солнеч-

Рис. 6.7. Ударная волна от солнечной вспышки.

1 — Солнце, 2 — место вспышки на поверхности Солнца, 3 — ударный фронт, 4 — силовые линии межпланетного магнитного поля, 5 — направление движения плазмы солнечного ветра.



ного ветра, так что возмущение распространяется в солнечном ветре со скоростью, превышающей альфвеновскую и скорость звука в виде сильной магнитогидродинамической волны, пример которой схематически изображен на рис. 6.7.

Результаты многочисленных измерений [26, 207—211], бóльшая часть которых выполнена у орбиты Земли, свидетельствуют о том, что вблизи ударного фронта практически всегда фиксируются повышенные потоки быстрых заряженных частиц. Чем более сильная волна, которую можно характеризовать скоростью ее распространения или числом Маха, тем более интенсивные потоки энергичных заряженных частиц регистрируются у ее фронта. При этом многие особенности возрастных сходны с теми, что наблюдаются у головной ударной волны.

Как и в случае головной ударной волны, все многообразие явлений разбивается обычно на два класса. Первый из них составляют ускоренные частицы с мягким спектром в узкой окрестности ударного фронта. Это так называемые отраженные частицы, присутствующие, как правило, вблизи фронтов квазиперпендикулярных волн, когда угол ψ между магнитным полем и нормалью к ударному фронту превышает 45° [209]. Возрастные, относящиеся к классу диффузных, наиболее интенсивны в случае квазипараллельных ударных волн, когда угол между магнитным полем и нормалью к фронту мал ($\psi \leq 30^\circ$). Различие между этими двумя типами возрастных имеет чисто условный характер. Оно определяется, по сути дела, тем, насколько велико относительное изменение энергии частицы при единичном взаимодействии с ударным фронтом.

Единная природа двух типов возрастных подтверждается анализом формы спектра ускоренных частиц непосредственно за ударным фронтом [209]. Дифференциальная интенсивность $\frac{dJ}{d\varepsilon} = p^2 f(p)$ в области энергий $35 \leq \varepsilon \leq 250$ кэВ обычно описывается степенной функцией $\varepsilon^{-\gamma_\varepsilon}$ с единым показателем γ_ε . Если возрастные обусловлены регулярным ускорением частиц, то $f(p) \sim p^{-3\sigma/(\sigma-1)}$ и показатель для дифференциальной интенсивности должен иметь значение

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\sigma + 2}{2(\sigma - 1)}. \quad (6.27)$$

На рис. 6.8 представлены результаты [209] измерений показателя спектра γ_ε и степени сжатия вещества σ для 75 ударных волн,

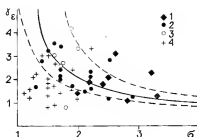


Рис. 6.8. Показатель дифференциального энергетического спектра ускоренных частиц в зависимости от степени сжатия [209].

Экспериментальные значения разбиты на классы: 1 — жесткие спектры для сильных косых ударных волн; 2 — резкие возрастания интенсивности ускоренных частиц, связанные с квазиперечными ударными волнами; 3 — кратковременные возрастания в квазиперечных ударных волнах; 4 — мягкие спектры, связанные со слабыми ударными волнами. Сплошная кривая соответствует предсказаниям теории регулярного ускорения, штриховые кривые показывают 25% отклонения.

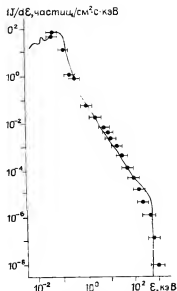


Рис. 6.9. Интенсивность ионов на фронте межпланетной ударной волны 27 августа 1978 г. в зависимости от кинетической энергии [164].

Точки — экспериментальные значения [26], кривая — результаты расчета из кинетической модели [164].

зарегистрированных с августа 1978 г. по декабрь 1980. Здесь же изображен график зависимости $\gamma_e(\sigma)$, определяемый соотношением (6.27). Абсолютное большинство экспериментальных значений, за исключением тех, что отвечают крайне слабым возрастаниям (крестики на рис. 6.8), в пределах экспериментальных неопределенностей согласуются с соотношением (6.27). Этот факт является доказательством того, что регулярное ускорение — главный процесс, обуславливающий возрастания интенсивности энергичных частиц вблизи фронта ударных волн.

При более высоких энергиях ($\epsilon > 250$ кэВ) чаще всего наблюдается укрупнение спектра ускоренных частиц. Вероятно, при этой энергии становятся существенными конечность размеров ударных волн и адиабатическое замедление частиц в расширяющемся солнечном ветре.

Более интересным представляется тот факт, что нередко (в 25% случаев) реализуются ситуации, когда спектр ускоренных частиц с увеличением энергии становится более пологим. Объяснить это можно тем, что эффективность регулярного ускорения в таких случаях наиболее велика и существенна модификация структуры ударной волны ускоренными частицами. Тогда, как показывают расчеты, представленные в гл. 5, должно наблюдаться выполаживание спектра ускоренных частиц по мере приближения к максимальной энергии ϵ_m . Если его по-прежнему представлять в виде степенной

функции $\varepsilon^{-\gamma_e}$, то показатель спектра плавно уменьшается с увеличением энергии ускоренных частиц в пределах от энергии инжекции ε_0 до энергии обрезания ε_m . При этом вместо (6.27) для показателя спектра справедлива связь с локальной степенью сжатия $\sigma_e = u(\varepsilon)/u_2$, определяемая по перепаду скорости среды в пределах от точки перед ударным фронтом, куда способны проникать частицы с энергией ε , до области за фронтом (см. (5.73)): $\gamma_e = (\sigma_e + 2)/[2(\sigma_e - 1)]$. Наибольшее значение показателя γ_e отвечает низкоэнергичной части спектра ускоренных частиц, имеющих энергию ε , ненамного превышающую энергию инжекции. Именно для этой части спектра будет выполнено соотношение (6.27), если степень сжатия определять по перепаду скорости среды на тепловом фронте (т. е. $\sigma = u_1/u_2$), как и делается в эксперименте. Выположивание спектра ускоренных частиц в области больших энергий, во первых, свидетельствует о том, что реальная степень сжатия выше измеренной на тепловом фронте, а во вторых, указывает на существенную степень модификации ударной волны ускоренными частицами. Заметим, что непосредственное измерение степени модификации ударной волны — трудная экспериментальная задача из-за большой величины скорости ударной волны.

Один из таких случаев, когда благодаря режиму насыщенной инжекции ускоренным частицам передается существенная доля полной энергии в ударной волне, представлен на рис. 6.9, где приведены экспериментальные значения дифференциальной интенсивности протонов $dJ/d\varepsilon$ [26] в зависимости от их кинетической энергии ε , причем представленный диапазон энергий полностью включает в себя как тепловые, так и ускоренные частицы. Эксперимент показывает, что ускорению подвергаются $\sim 1\%$ частиц. Несмотря на то, что максимальная энергия ускоренных частиц не велика, они содержат около 25% всей внутренней энергии плазмы. Плавный переход от теплового участка спектра ($\varepsilon < 200$ эВ) к спектру ускоренных частиц ($\varepsilon > 200$ эВ) указывает на то, что процесс ускорения начинается непосредственно из теплового распределения. Именно этот принцип заложен в кинетической модели регулярного ускорения [158—169]. Сравнение расчетных данных, полученных в рамках данной модели [164], с экспериментальными показывает их хорошее согласие. Это свидетельствует о том, что при всей схематичности описания структуры теплового фронта, которую дает кинетическая модель, она не только правильно описывает процесс регулярного ускорения, но в общих чертах хорошо отражает наиболее характерные моменты процесса инжекции частиц в режим ускорения.

В то же время не следует переоценивать значение хорошего согласия результатов теории и эксперимента. Трудно надеяться на адекватность кинетической модели реальному процессу термализации частиц плазмы на тепловом фронте. Так, инжекция частиц в режим регулярного ускорения, по-видимому, осуществляется вследствие отражения части ионов от ударного фронта, благодаря чему они приобретают достаточную энергию для того, чтобы вступить

в процесс ускорения. Согласие же теории и эксперимента, скорее всего, обусловлено реализацией насыщенного режима инжекции в рассматриваемом событии. В условиях насыщенной инжекции, как было показано в гл. 5, многие аспекты регулярного ускорения нечувствительны к изменению параметров, определяющих инжекцию, благодаря саморегулирующим свойствам процесса регулярного ускорения.

С учетом сказанного можно сделать основные выводы. Согласие данных теории и эксперимента в форме спектра ускоренных частиц — еще одно доказательство того, что ускорение частиц ударными волнами в космической плазме обусловлено регулярным процессом ускорения. С другой стороны, можно говорить о том, что в космической плазме реализуются благоприятные условия для осуществления насыщенной инжекции частиц в режим регулярного ускорения.

23.4. Солнечные космические лучи и процесс регулярного ускорения. Универсальный характер регулярного ускорения привлек внимание исследователей к этому процессу для объяснения такого давно изучаемого явления, как генерация солнечных космических лучей во время вспышек на Солнце [151, 214, 230, 231]. Причиной этому послужил также установленный экспериментально факт, суть которого состоит в корреляции явлений генерации космических лучей во время вспышки и образования ударной волны в атмосфере Солнца [232], о наличии которой судят по радиоизлучению II типа [10].

Рассмотреть процесс регулярного ускорения заряженных частиц в атмосфере Солнца столь же детально, как и в межпланетном пространстве, невозможно по вполне понятным причинам: физические условия, реализующиеся в этой области, гораздо менее изучены по сравнению с межпланетным пространством. Тем не менее вызывают интерес исследования [213], которые показали, что при достаточно разумных предположениях, касающихся физических условий в атмосфере Солнца при распространении в ней ударной волны, удастся объяснить основные наблюдаемые особенности генерации солнечных космических лучей, такие как форма энергетического спектра, химический состав и их взаимосвязь со степенью сжатия, вещества в ударной волне. При этом допущения касаются особенностей инжекции частиц в режим ускорения и параметров, определяющих их распространение. Трудно предполагать, что экспериментальные исследования в ближайшее время внесут полную ясность в эти вопросы. Тем не менее прогресс в изучении возможностей регулярного ускорения в атмосфере Солнца весьма возможен. Он может быть связан, прежде всего, с процессом понимания общих закономерностей инжекции частиц на ударном фронте в режим ускорения, которые можно было бы распространить на эту область пространства.

Таким образом, можно утверждать, что все многообразие наблюдаемых в межпланетном пространстве явлений ускорения заряженных частиц ударными волнами удалось понять и объяснить

с единых позиций теории регулярного ускорения. Несмотря на ряд нерешенных вопросов, во многих случаях удается достичь количественного согласия теории и эксперимента. Это дает возможность надеяться на то, что для описания процессов ускорения частиц в удаленных областях космического пространства, где невозможны прямые измерения, теория регулярного ускорения также будет справедлива.

§ 24. ГАЛАКТИЧЕСКИЕ КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

В настоящее время не только происхождение галактических космических лучей высоких энергий ($\epsilon \gtrsim 1$ ГэВ/нуклон), которые содержат основную долю их общего энергосодержания, является нерешенным вопросом, но и не выяснено происхождение их низкоэнергетического участка спектра ($\epsilon \lesssim 20$ МэВ/нуклон), наблюдаемого у Земли. Идея как галактического, так и солнечного происхождения этих частиц встречают значительные трудности (см. [1] и ссылки там). Уже давно высказывались соображения о том, что эта часть галактических космических лучей может генерироваться в области взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой [233—235]. Поскольку, по современным представлениям, в этой области должна существовать сильная ударная волна [8, 9], весьма привлекательной выглядит идея о регулярном ускорении частиц низкоэнергетической части спектра, которые принято также называть фоновыми космическими лучами [236, 237].

24.1. Стоячая ударная волна в солнечном ветре. Динамическое давление солнечного ветра ρu^2 падает с расстоянием от Солнца, поскольку непрерывность потока вещества при постоянной скорости u обеспечивается тогда, когда плотность ρ падает с расстоянием как r^{-2} . На больших расстояниях, когда давление ρu^2 становится сравнимым с давлением межзвездной среды P_i , солнечный ветер будет испытывать торможение. При этом возможно образование стоячей ударной волны [8, 9]. С учетом неопределенностей информации о межзвездной среде расстояние до ударной волны должно находиться в диапазоне $R = 50\text{—}100$ а.е. Поскольку параметры солнечного ветра — плотность ρ , скорость u , магнитное поле B — существенно меняются с гелиоширотой, можно ожидать, что форма ударной волны будет значительно отличаться от сферической. Однако в качестве первого приближения можно принять простейшую модель сферически-симметричного ветра [8]:

$$u(r < R) = u_1, \quad u(r > R) = u_2(R/r)^2, \quad (6.28)$$

где $u_2 = u_1/\sigma$ — скорость солнечного ветра непосредственно за фронтом стоячей сферической ударной волны радиусом R , σ — степень сжатия вещества на ударном фронте, значение которой в данном случае близко к 4.

Коэффициенты диффузии, определяющие распространение быстрых частиц в солнечном ветре, могут быть выбраны из следующих соображений. Прежде всего необходимо принять во внимание основные закономерности распространения быстрых частиц из межзвездного пространства ($r \gg R$) и их ускорения на стоячей ударной волне, которые качественно правильно описываются решением уравнения переноса, полученным в § 11. Это решение показывает, что распространение частиц из межзвездной среды в окрестность ударного фронта сильно подавлено, если параметр модуляции для этих частиц $g_2 = Ru_2/\kappa_2$ велик. Таким же образом, проникновение частиц от ударного фронта во внутреннюю область гелиосферы $r \ll R$ подавлено при $g_1 = Ru_1/\kappa_1 \gg 1$. Напротив, при малых параметрах модуляции ($g_{1,2} \ll 1$) распределение частиц слабо модулируется солнечным ветром.

Как уже не раз отмечалось, большая возмущенность среды за ударным фронтом, по-видимому, обеспечивает соотношение $g_2 \gg g_1$. Полезная информация об энергетической зависимости параметров модуляции может быть получена, если наряду со сказанным учесть особенности наблюдаемых вариаций интенсивности галактических космических лучей с циклом солнечной активности. Результаты эксперимента свидетельствуют в пользу того, что космические лучи с энергиями $\epsilon \gtrsim 20$ МэВ/нуклон имеют галактическое происхождение [1], в то же время они сильно модулируются солнечным ветром. Два этих факта можно совместить, если принять, что для энергий $\epsilon \gtrsim 20$ МэВ/нуклон $g_2 \gtrsim 1$, следовательно, обеспечивается сильная модуляция, а $g_1 \lesssim 1$, и соответственно значительное ускорение частиц таких энергий ударной волной становится невозможным [1].

Поскольку для быстрых частиц практически всегда реализуется растущий с энергией коэффициент диффузии, можно считать, что во внешней области для частиц с энергией $\epsilon < 20$ МэВ/нуклон и давно выполнено условие $g_2 \gg 1$. Это делает практически невозможным сколько-нибудь заметное проникновение частиц таких энергий в гелиосферу с больших расстояний ($r \gg R$). С другой стороны, чтобы космические лучи с энергией $\epsilon < 20$ МэВ/нуклон могли генерироваться ударной волной, для них требуется также $g_1 > 1$.

Суммируя сказанное, можно заключить, что коэффициенты диффузии космических лучей должны обеспечивать условия

$$\begin{aligned} g_2 \gg 1, g_1 > 1 & \text{ при } \epsilon < 20 \text{ МэВ/нуклон,} \\ g_2 > 1, g_1 \simeq 1 & \text{ при } \epsilon \simeq 20 \text{ МэВ/нуклон.} \end{aligned}$$

24.2. Метод решения уравнения переноса. Аналитическое решение задачи регулярного ускорения стоячей сферической ударной волной, обсуждавшееся в § 11, показывает, что частицы, распространяясь из окрестности ударного фронта, где они ускоряются, во внутреннюю область гелиосферы, подвергаются модулирующему воздействию солнечного ветра, в частности, адиабатическому замедлению. Поскольку степень этого воздействия существенно зависит от коэффициента диффузии частиц, выяснить роль регуляр-

ного ускорения в генерации галактических космических лучей низких энергий можно только, используя коэффициенты диффузии, величина которых не выходит за пределы, установленные экспериментом. При этом учет требуемой зависимости коэффициентов диффузии от расстояния до Солнца и энергии (или импульса) частицы можно осуществить лишь путем численного решения уравнения переноса:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right) - u \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{u_1 N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \delta(r - R) = 0. \quad (6.29)$$

Решение этого уравнения во внешней области ($r > R$), удовлетворяющее требуемому условию отсутствия ускоренных частиц на больших расстояниях $f_2(\infty, p) = 0$ при произвольном коэффициенте диффузии $\kappa_2(r, p)$, как нетрудно видеть, имеет вид

$$f_2(r, p) = f_1(R, p) \left\{ 1 - \exp \left[- \int_r^\infty \frac{u_2}{\kappa_2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 dr \right] \right\} / \left\{ 1 - \exp \left[- \int_R^\infty \frac{u_2}{\kappa_2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 dr \right] \right\}. \quad (6.30)$$

Для численного решения уравнения (6.29) во внутренней области ($r < R$) удобно свести его к интегральному [238]. Для этого достаточно проинтегрировать уравнение (6.29) почленно по координате r в пределах от 0 до $R + 0$, предварительно домножив его на r^2 , что с учетом (6.30) дает

$$u_2 R^2 f_1(R, p) \left/ \left\{ 1 - \exp \left[- \int_R^\infty \frac{u_2}{\kappa_2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 dr \right] \right\} \right. = \frac{1}{3} \int_0^{R+0} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^3 f_1(r, p)] dr - \frac{\Delta u R^2}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^3 f_1(R, p)]. \quad (6.31)$$

Пренебрегая экспонентой в знаменателе первого члена в левой части этого уравнения, что оправдано в силу принятого условия $g_2 \gg 1$, подставляя $\partial(r^2 u)/\partial r = 2u_1 r$ и интегрируя почленно это уравнение по p от 0 до p с учетом условия ограниченности функции распределения: $\lim_{p \rightarrow \infty} f(r, p) = 0$, приходим к уравнению [238]

$$f_1(R, p) = \frac{N_0 q}{4\pi p^3} \theta(p - p_0) - \frac{3u_2}{\Delta u p^3} \int_0^p f_1(R, p) p^2 dp - \frac{2q}{3R^2} \int_0^R f_1(r, p) r dr. \quad (6.32)$$

dJ/dE , частиц/м²с-ср-МэВ

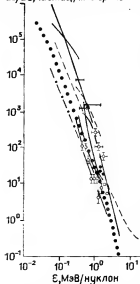


Рис. 6.10. Интенсивность галактических космических лучей у орбиты Земли в зависимости от кинетической энергии на нуклон.

Зачерненные кружки — данные расчета [238] интенсивности протонов, ускоренных сферической ударной волной радиусом $R = 50$ а. е., все остальные обозначения — экспериментальные значения, полученные в спокойные периоды солнечной активности [242].

Это уравнение можно решать методом итераций. Для заданной функции $f_1^{(i)}(R, p)$ сначала нужно решить уравнение (6.4) численно во внутренней области ($r < R$), что позволяет определить функцию $f_1^{(i+1)}(r, p)$. Подстановка функции $f_1^{(i+1)}(r, p)$ в правую часть интегрального уравнения (6.34) позволяет определить функцию $f_1^{(i+2)}(R, p)$, являющуюся следующим, $(i+1)$ -м, приближением к точному решению. Повторяя эту процедуру необходимое число раз, что определяется соображениями требуемой точности, можно получить решение поставленной задачи.

24.3. Результаты численного счета. Результаты численного решения задачи регулярного ускорения заряженных частиц стоячей сферической ударной волной в солнечном ветре [126, 238], полученные описанным методом, показаны на рис. 6.10 в виде графика зависимости ожидаемой интенсивности протонов dJ/dE на орбите Земли ($r = 1$, а. е.) от кинетической энергии E . Были использованы следующие значения входящих в задачу параметров: скорость солнечного ветра $u_1 = 5 \cdot 10^5$ м/с, радиус ударной волны $R = 50$ а. е., энергия инжектируемых частиц $\varepsilon_0 = p_0^2/2m = 1$ кэВ. Темп инжекции задавался величиной N_0 , которая выбрана так, чтобы плотность энергии ускоренных частиц на ударном фронте

$$E_{c2} = \int_{p_0}^{\infty} \frac{p^4}{2m} f(R, p) dp$$

составляла 5% от внутренней энергии плазмы сразу за фронтом $E_2 = (9/8) \rho_1 u_1^2$, что позволяет применять линейное приближение. Использованный коэффициент диффузии $\kappa_1(r, p) = 6,5 \cdot 10^{22} (p/mc)^{0,3} (r/R)^{0,2}$ см²/с имеет пространственную зависимость, которая не противоречит результатам измерений, выполненных в области $1 \leq r \leq 6$ а. е. [240], хотя значения κ_1 при $r = 1$ а. е. для энергий $E \leq 10$ МэВ несколько превышают наблюдаемые в спокойном солнечном ветре [241].

На том же рисунке для сравнения представлены результаты измерений интенсивности галактических космических лучей в спокойные периоды солнечной активности, суммированные в работе

[242]. Хотя расчет и основан на сильно упрощенной модели солнечного ветра, результаты соотношения теории и эксперимента позволяют сделать вывод о том, что регулярное ускорение частиц стоячей ударной волной, ограничивающей гелиосферу, может обеспечить наблюдаемую интенсивность галактических космических лучей с энергиями $\epsilon \lesssim 20$ МэВ/нуклон.

§ 25. КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ И СВЕРХНОВЫЕ ЗВЕЗДЫ

Исследование процессов ускорения заряженных частиц в остатках сверхновых звезд*) представляет значительный интерес прежде всего потому, что они являются одним из немногих типов галактических объектов, которые с учетом энергетических требований могут рассматриваться в качестве вероятного источника галактических космических лучей.

25.1. Ударные волны от вспышек сверхновых. Согласно современным представлениям, в Галактике в среднем каждые 10—30 лет взрываются сверхновые звезды. Существенная доля энергии $E_{SN} = 10^{49} - 10^{51}$ эрг выделяется при взрыве звезды в форме кинетической энергии, выбрасываемой в окружающее пространство массы вещества звезды или оболочки [7]. (Уточним, что речь идет об одном из двух типов сверхновых, а именно сверхновых II типа, которые и представляются наиболее вероятными источниками галактических космических лучей.) Выделяющаяся в Галактике при этом мощность $10^{46} - 3 \cdot 10^{42}$ эрг/с достаточна для восполнения потерь энергосодержания галактических космических лучей $\sim 10^{46}$ эрг/с, обусловленных их выходом из Галактики.

Сброшенная оболочка движется со скоростью $u_{10} = 10^8 - 10^7$ м/с и подобно поршню «сгребает» впереди себя межзвездное вещество. При этом возмущение распространяется в окружающей межзвездной среде в виде сильной магнитогидродинамической волны, число Маха которой в начальный период составляет $M_{10} \simeq 20$.

Некоторое время, пока масса «заметенного» межзвездного вещества не станет сравнимой с массой оболочки, ее движение, а следовательно, и расширение ударной волны происходит с постоянной скоростью. Эта стадия эволюции остатка сверхновой, которая получила названия стадии свободного разлета, описывается простым соотношением скорости и размера ударной волны:

$$R = u_{10} t. \quad (6.33)$$

Расширение ударной волны в однородной среде, когда масса заметенного вещества значительно превышает массу оболочки, описывается автомодельным законом Седова

$$R = R_0 (t/t_0)^{2/5}, \quad (6.34)$$

*) Далее везде слово «звезда» будем опускать.

где величины t_0 и R_0 связаны с энергией взрыва соотношением

$$R_0^5/t_0^2 = 2,2E_{SN}/\rho_1. \quad (6.35)$$

Константы t_0 и $R_0 = R(t_0)$ удобно трактовать как время начала так называемой адиабатической стадии расширения и размер ударной волны в этот момент соответственно. Тогда, приравнявая скорость ударной волны

$$u_1(t) = \frac{2}{5} \frac{R_0}{t_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-3/5} \quad (6.36)$$

в момент времени t_0 к начальной скорости u_{10} и используя (6.35), получим

$$t_0 = 0,4R_0/u_{10}, \quad R_0 = (8,8E_{SN}/\rho_1 u_{10}^2)^{1/3}. \quad (6.37)$$

Для стандартных параметров взрыва [7, 186, 187] $E_{SN} = 10^{51}$ эрг, $u_{10} = 4 \cdot 10^6$ м/с и горячей межзвездной среды с плотностью $\rho_1 = 3 \cdot 10^{-3} m_p$ (m_p — масса протона) значения этих величин

$$t_0 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ лет}, \quad R_0 = 28 \text{ пк}. \quad (6.38)$$

Расширение ударной волны от сверхновой по автомодельному закону (6.36) прекращается, когда значение числа Маха $M_1(t) = M_{10}(t/t_0)^{-3/5}$ приближается к единице. Тем не менее можно считать, что размер

$$R_f = M_{10}^{2/3} R_0 \quad (6.39)$$

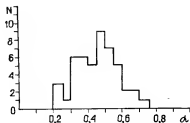
соответствует конечному этапу адиабатического развития ударной волны ($M_{1f} = 1$), что в численном выражении дает $R_f = 206$ пк.

25.2. Экспериментальные свидетельства регулярного ускорения космических лучей в остатках сверхновых. Остатки вспышек сверхновых являются мощными источниками радиоизлучения (см. [7] и ссылки там). В настоящее время считается установленной синхротронная природа радиоизлучения, в соответствии с чем излучение обусловлено синхротронными потерями релятивистских электронов. Наличие большого количества высокоэнергичных электронов в остатках сверхновых, которые в широком диапазоне их размеров расширяются по закону, близкому к автомодельному (6.34), свидетельствует о протекании в этих остатках интенсивных ускорительных процессов, а также о том, что процессы ускорения прямо или косвенно связаны с ударной волной. О существенной роли ударной волны говорит также тот факт, что значительная часть радиоизлучающих остатков имеет оболочечную структуру, которая характерна тем, что наиболее интенсивное радиоизлучение наблюдается из периферийных участков остатка сверхновых [7, 186].

Степенная зависимость интенсивности радиоизлучения от частоты $J_\nu \sim \nu^{-\alpha}$ указывает на то, что энергетический спектр релятивистских электронов в остатках имеет также степенную форму $n(\epsilon) \sim \epsilon^{-\gamma}$ в широком диапазоне энергий, причем между показателями этих спектров имеется простая связь [4]:

$$\alpha = (\gamma - 1)/2. \quad (6.40)$$

Рис. 6.11. Гистограмма распределения спектрального индекса синхронного излучения остатков сверхновых [7].



На рис. 6.11, взятом из работы [7], показано распределение остатков по спектральному индексу α , откуда видно, что для радиоизлучения остатков сверхновых характерным является значение показателя спектра радиоизлучения $\alpha = 0,5$, чему соответствует согласно (6.40) спектр электронов с показателем $\gamma = 2$. Этот экспериментальный факт находит естественное объяснение, если предположить, что релятивистские электроны в остатке сверхновой ускоряются посредством регулярного механизма на фронте ударной волны, ограничивающей эту сверхновую [55]. Для сильной ударной волны согласно (1.9) степень сжатия близка к 4, и в соответствии с (1.19) предсказываемое теорией регулярного ускорения значение показателя спектра $\gamma = 2$ совпадает с наблюдаемым.

Другой важной характеристикой радиоизлучения остатков является зависимость светимости остатка Σ_v от его размера (диаметра) D . Если принять спектр электронов в виде $n(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$, то ожидаемая связь между Σ_v и D , даваемая теорией синхротронного излучения [4], описывается соотношением

$$\Sigma_v = \left(4,57 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср}} \right) \frac{B^{3/2} D E_e}{L} \left(\frac{v}{1 \text{ ГГц}} \right)^{-1/2}, \quad (6.44)$$

в котором B — магнитное поле в остатке сверхновой, E_e — плотность энергии электронов, $L = \ln \epsilon_{\text{max}} / \epsilon_{\text{min}}$, ϵ_{max} , ϵ_{min} — максимальная и минимальная энергии в спектре электронов. Чтобы установить окончательную взаимосвязь между Σ_v и D , необходимо конкретизировать зависимость величины магнитного поля и плотности энергии электронов E_e от размера остатка D . К сожалению, существующие методы не позволяют по результатам наблюдений независимо определять $B(D)$ и $E_e(D)$. В то же время отсутствуют также сколько-нибудь надежные теоретические предсказания на этот счет.

Если основываться на предположении о регулярном ускорении электронов, то весьма естественным представляется допущение о том, что процесс ускорения протекает в условиях насыщенной инжекции. Совместно с принимаемым обычно предположением о равномерном распределении энергии магнитного поля и космических лучей [4—7]

$$B^2 / 8\pi = E_e \quad (6.42)$$

это позволяет получить

$$E_e = B^2 / 8\pi = 2E_{\text{SN}} / (\pi D^3) \quad (6.43)$$

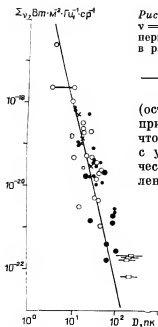


Рис. 6.12. Светимость остатков сверхновых на частоте $\nu = 1$ МГц в зависимости от диаметра остатков. Экспериментальные значения соответствуют приведенным в работе [186], сплошная линия — значения, рассчитанные по формуле (6.45).

(остальная треть энергии в ударной волне E_{SN} приходится на тепловую плазму). Заметим, что в рамках модели регулярного ускорения с учетом большой динамической роли космических лучей (см. гл. 5) закон равномерного распределения (6.43) выглядит особенно естественно.

Дополнительные трудности возникают при переходе к плотности энергии электронов, поскольку, как уже отмечалось, условия инжекции электронов в режим регулярного ускорения остаются одними из наименее изученных вопросов. В этой ситуации наиболее логичным кажется предположение о том, что на электроны приходится примерно один процент энергии

$$E_e = 10^{-2} E_c, \quad (6.44)$$

как это имеет место для галактических космических лучей.

Соотношения (6.42) — (6.44) позволяют из (6.41) получить окончательную связь между Σ_{ν} и D :

$$\Sigma_{\nu} = \left(1,1 \cdot 10^{-14} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср}} \right) \left(\frac{E_{SN}}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{7/4} \left(\frac{D}{1 \text{ пк}} \right)^{-17/4} \left(\frac{\nu}{1 \text{ ГГц}} \right)^{-1/2}. \quad (6.45)$$

При этом принято значение $L = 10$.

На диаграмме $\Sigma_{\nu} - D$ (рис. 6.12) представлены данные измерений [186] для ряда остатков сверхновой, а также изображен график зависимости $\Sigma_{\nu}(D)$, описываемый выражением (6.45) для стандартного значения энергии взрыва $E_{SN} = 10^{51}$ эрг. Учитывая разброс экспериментальных данных и их неопределенность (подробнее см. [186]), можно признать согласие теории с экспериментом удовлетворительным.

Таким образом, все основные особенности радиоизлучения остатков сверхновых получают вполне логичное объяснение в рамках теории регулярного ускорения, что одновременно можно рассматривать в качестве доказательства преобладающей роли процесса регулярного ускорения в остатках сверхновых.

25.3. Форма спектра космических лучей, ускоренных в остатках сверхновых. Как уже отмечалось, сверхновые в силу энергетических соображений рассматриваются в качестве наиболее вероятного источника галактических космических лучей [4—6]. Они способны пополнять потери заключенной в галактических космических

лучах энергии ($\sim 3 \cdot 10^{40}$ эрг/с), обусловленные их выходом из Галактики, если механизм ускорения обеспечивает передачу не менее 1% выделившейся при взрыве энергии ускоренным частицам. В этом плане весьма перспективным выглядит регулярный механизм ускорения, характеризующийся высокой эффективностью.

Чтобы окончательно выяснить роль сверхновых в формировании наблюдаемого спектра галактических космических лучей, необходимо сопоставить предсказания теории регулярного ускорения с основными характеристиками их спектра. Одна из основных характеристик — степенная форма энергетического спектра галактических космических лучей $n \sim \varepsilon^{-1}$, примечательной особенностью которого является слабая зависимость показателя спектра γ от энергии. Так, для диапазона энергий $10^9 - 3 \cdot 10^{15}$ эВ показатель спектра остается практически неизменным и составляет $\gamma = 2,7$ [4–7].

Для сопоставления результатов наблюдения с теоретическими необходимо рассчитать суммарный спектр $N(p)$ всех космических лучей, образованных ударной волной от сверхновой за все время ее существования t_i и поступивших в межзвездную среду. В линейном приближении спектр $N(p)$ может быть определен на основе формул § 13, если известны закон расширения ударной волны $R(t)$ и темп инжекции частиц в режим ускорения $N_0(t)$. Для этого достаточно плотность космических лучей $n(r, p, t_i)$, отвечающую моменту времени t_i , когда число Маха $M_1(t_i) = 1$, проинтегрировать по пространству

$$N(p) = 4\pi \int_0^\infty n(r, ap, t_i) a^{-2} r^2 dr, \quad (6.46)$$

где фактор $a(r, t_i)$ описывает изменение энергии космических лучей, обусловленное релаксацией среды за ударным фронтом к состоянию межзвездной среды. Если предположить, что релаксация для космических лучей протекает адиабатически, то, как было установлено (см. (3.72)), величина этого фактора будет определяться отношением плотностей среды $\rho(r, t_i)$, в которой они находятся в момент времени t_i , и межзвездной среды ρ_1

$$a(r, t) = [\rho(r, t)/\rho_1]^{1/3}. \quad (6.47)$$

Выражение для суммарного спектра ускоренных ударной волной космических лучей можно записать в несколько пной, более простой, форме:

$$N(p) = 4\pi p^2 \int_0^{t_i} (u_1 R^2 N_0 / p_0^3) G[a(R, t) p, p_0] dt, \quad (6.48)$$

если ограничиться в каждый момент времени t рассмотрением только тех частиц, которые подвержены эффективному ускорению. Согласно § 13 им отвечает диапазон $p_0 - p_m(t)$, в котором максимальный импульс определяется размерами R и скоростью u_1 удар-

$N(p)$, отн.ед.

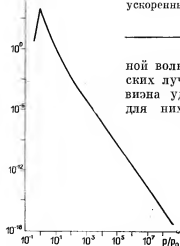


Рис. 6.13. Форма суммарного спектра космических лучей ускоренных ударной волной от сверхновой звезды за все время существования.

ной волны и коэффициентом диффузии космических лучей (см. (3.55)). Для таких частиц кризиса ударного фронта несущественна, поэтому для них может быть использована функция Грина (2.30) задачи регулярного ускорения плоской ударной волной. Кроме того, как было ранее показано в § 13, все частицы с импульсами $p \ll p_m(t)$, прежде чем выйти в межзвездное пространство, испытывают адиабатическое замедление в расширяющейся области за ударным фронтом, описываемое коэффициентом a . Этот коэффициент согласно (6.47) однозначно связан с величиной степени сжатия вещества на ударном фронте

$$a(R, t) = [\sigma(t)]^{1/2}, \quad (6.49)$$

поскольку $\sigma = \rho(R)/\rho_1$. Заметим также, что физически возможна несколько иная картина релаксации среды за ударным фронтом к состоянию межзвездной среды, которой соответствуют степень замедления космических лучей, отличная от той, что описывается выражением (6.49) [243—245]. Однако это не приводит к существенному различию конечных результатов.

Задаваясь той или иной зависимостью темпа инжекции частиц в режим ускорения от времени $N_0(t)$, нетрудно рассчитать на основе формул (6.48) и (6.49) суммарный спектр космических лучей, произведенных за время адиабатической стадии расширения $t_0 - t_f$. (Нетрудно убедиться в том, что относительная кратковременность стадии свободного разлета (6.33) обуславливает ее незначительный вклад в суммарный спектр ускоренных космических лучей.)

Типичный пример суммарного спектра космических лучей приведен на рис. 6.13. Он построен на основе результатов работы [244] и отвечает случаю постоянного темпа инжекции ($N_0(t) = \text{const}$) и значению импульса инжекции $p_0 = 1,4 \cdot 10^{-3}$ ГэВ/с ($\epsilon_0 = 1$ кэВ). Используются следующие параметры ударной волны: $u_{10} = 1,75 \cdot 10^6$ м/с, $M_{10} = 10$, $R_0 = 44,5$ пк, $t_0 = 10^4$ лет. Как видно, они несильно отличаются от приведенных в п. 25.1. Основные особенности суммарного спектра, которые можно увидеть из этого рисунка и подробное обсуждение которых дается в работах [243—245], состоят в следующем. Суммарный спектр космических лучей, за исключением узкой области $p_0 \leq p \leq 10^2 p_0$ вблизи импульса инжекции p_0 , имеет форму, близкую к степенной:

$$N(p) \sim p^{-\gamma}, \quad (6.50)$$

причем показатель спектра лежит в пределах $2,1 \leq \gamma \leq 2,3$.

Основной вклад в суммарный спектр космических лучей дают промежуточные стадии адиабатического расширения ударной волны. В силу причин геометрического характера вклад ранних стадий, отвечающих большим числам Маха ($M_1 > 8$), ощутим только при самых больших значениях импульса в спектре. Поздние стадии, отвечающие числам Маха $M_1 < 3$, также мало существенны для суммарного спектра космических лучей, поскольку спектр генерируемых в эти периоды космических лучей из-за малой степени сжатия слишком мягкий и его вклад при больших импульсах неощутим.

Важно отметить, что отмеченные особенности мало зависят от принимаемых значений параметров ударной волны t_0 , M_{10} , u_{10} , R_0 , а также от закона изменения темпа инжекции во времени $N_0(t)$.

Приведенный анализ остается дополнить рассмотрением вклада убегающих частиц в суммарный спектр. Количество этих частиц

$$N(p) = Vn(p = p_m(t), t) \quad (6.51)$$

нетрудно оценить, если учесть, что убегающие частицы в момент их генерации занимают объем $V \simeq (4\pi/3) (2R)^3$. Учитывая, что для больших чисел Маха ($M_1 \gg 1$) плотность ускоренных частиц $n(p, t) = CN_0(t)p^{-2}$, получим

$$N(p) \sim N_0(t) R^3 p^{-2},$$

откуда видно, что, если темп инжекции меняется по закону $N_0 \sim R^{-3}$, спектр убегающих частиц имеет универсальный вид: $N \sim p^{-2}$.

Закон инжекции $N_0 \sim R^{-3}$ имеет вполне ясный физический смысл — для адиабатической стадии расширения он отвечает ситуации, когда ускоренным частицам передается фиксированная часть энергии $\rho_1 u_1^2/2$ набегающего на ударный фронт потока среды. В этом случае приходим к заключению, что суммарный спектр космических лучей, произведенных ударной волной от вспышки сверхновой, имеет степенную форму (6.50) вплоть до предельного импульса $p_m(t_0)$, который определяется условием

$$u_{10} R_0 / \kappa_1 (p_m) = 1 \quad (6.52)$$

и отвечает началу адиабатической стадии расширения. Такая форма спектра космических лучей с учетом энергетической зависимости времени их пребывания в Галактике хорошо соответствует наблюдаемому спектру галактических космических лучей в области энергий $10^{10} - 10^{15}$ эВ (см., например, [4—6]).

Хотя о реальных процессах инжекции, которые могут реализовываться на ударных фронтах в межзвездной среде, почти ничего не известно, интересно рассмотреть результирующий спектр космических лучей $N(p)$, формирующийся в условиях насыщенной инжекции. Только при этом условии космическим лучам может быть передана существенная часть полной энергии ударной волны, что необходимо, если рассматривать сверхновые в качестве основного

источника галактических космических лучей. Кроме того, если учесть результаты измерений, выполненных в межпланетном пространстве, реализация насыщенного режима инжекции представляется весьма реальной.

При насыщенном режиме инжекции спектр ускоренных частиц на ударном фронте в каждый момент времени, как было показано в § 19, не обладает степенной формой p^{-1} с единым показателем γ в отличие от линейного случая. В связи с этим задача определения результирующего спектра $N(p)$ несколько усложняется. Однако можно предположить, что в силу тех же геометрических факторов, которые срабатывают в линейном случае, основной вклад в спектр космических лучей $N(p)$ дадут стадии эволюции ударной волны, отвечающие степени сжатия $\sigma \leq 3,6$, за исключением области малых ($p_0 \leq p \leq mc$) и больших ($p \sim p_m(t_0)$) значений импульсов.

Как отмечалось в § 19, для $M_1 < 4$ релятивистские частицы вызывают не очень значительную модификацию ударной волны, в силу чего форма их спектра близка к рассчитанному в линейном приближении с той же степенью сжатия. Кроме того, при $M_1 \gg 1$ парциальное давление $\mathcal{P}(p_m)/\rho_1 u_1^2$ частиц с максимальным импульсом p_m мало меняется с изменением самого импульса p_m . Это означает, что для плотности этих частиц справедлива зависимость $n(p_m) \sim \rho_1 u_1^2 p_m^{-2}$, поэтому из выражения (6.51) следует, что спектр убегающих частиц будет степенным p^{-1} с показателем $\gamma \approx 2$. Энергия, заключенная в релятивистских частицах ($\epsilon > mc^2$), будет составлять $\sim 10\%$ от полной энергии в ударной волне без учета вклада убегающих частиц.

Таким образом, ударные волны от сверхновых способны обеспечить спектр галактических космических лучей нужной формы и амплитуды.

25.4. Предельная энергия космических лучей. В вопросе о роли сверхновых как возможного источника галактических космических лучей первостепенное значение имеет максимальная энергия частиц, генерируемых посредством того или иного механизма ускорения. Для процесса регулярного ускорения максимальная энергия определяется соотношением (6.52) и зависит главным образом от коэффициента диффузии космических лучей κ_1 в области перед ударным фронтом. При этом, как обычно, предполагается, что значение коэффициента диффузии во внутренней области не накладывает дополнительных ограничений на величину p_m , т. е. $\kappa_2 \ll \kappa_1$, из-за большей степени возмущенности среды за ударным фронтом.

Если использовать типичные параметры ударной волны от сверхновой ($R_0 = 30$ пк, $u_{10} = 4 \cdot 10^6$ м/с), приведенные в п. 25.1, из соотношения (6.52) получим величину коэффициента диффузии, соответствующего максимальному импульсу космических лучей

$$\kappa_1(p_m(t_0)) = 3,6 \cdot 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}. \quad (6.53)$$

Принимая для диска Галактики коэффициент диффузии $\kappa_1(p) = 5 \cdot 10^{27} (pc/3 \text{ ГэВ/нуклон})^{0,3}$, который дает диффузионная модель

[190, 191] распространения космических лучей в Галактике на основе измерений химического состава галактических космических лучей, получаем $p_m c = 2 \cdot 10^{12}$ эВ/нуклон [246].

В окрестности ударного фронта, где космические лучи генерируют магнитогиродинамическую турбулентность [41], коэффициент диффузии должен быть меньше среднего. Теоретически нижним пределом κ является $\kappa_{\min} = \rho_B c/3$, чему соответствует максимальный импульс $p_m = 3 \cdot 10^{15}$ эВ/нуклон, если принять для межзвездного магнитного поля типичное значение $B = 3 \cdot 10^{-6}$ Гс.

Вопрос о том, в какой степени генерация турбулентности частицами космических лучей перед ударным фронтом может понизить коэффициент диффузии, детально не исследован. Имеющиеся оценки [247] основаны на предположении о том, что давление космических лучей на ударном фронте P_{cl} не превышает давления межзвездного магнитного поля $B^2/8\pi$, что маловероятно, поскольку даже перед ударным фронтом — в межзвездной среде $P_{cl} \sim B^2/8\pi$ [4—7].

Ограничения, накладываемые на величину максимального импульса квазилинейной теорией альфвеновской турбулентности, можно установить, если воспользоваться результатами § 17, где изложено решение самосогласованной задачи ускорения космических лучей плоской параллельной ударной волной и, в частности, показано, что характерный размер области ускорения вблизи ударного фронта составляет

$$L = \frac{4}{3\pi} \frac{B^2/8\pi}{\mathcal{P}_2} \frac{c}{c_a} \rho_B.$$

Отсюда видно, что самосогласованная турбулентность обеспечит ускорение космических лучей ударной волной конечных размеров R , если выполнено условие $L \ll R$. Хотя выражение для L получено в линейном по давлению космических лучей приближении, оно может быть использовано для оценки и в тех случаях, когда космические лучи содержат существенную часть полной энергии в ударной волне, поскольку модификация ударной волны давлением космических лучей не может сильно повлиять на генерацию альфвеновских волн. В условиях насыщенной инжекции, как было показано в § 8, парциальное давление релятивистских ускоренных частиц имеет минимум при некотором значении импульса $mc < p < p_m$, причем $\mathcal{P}_{\min} \simeq \pi^2 \rho_1 u_1^2 / \ln^2(p_m/mc)$ при $p_m \gg mc$. С учетом этого условие $L \ll R$ запишется в виде

$$p_m c \ll \frac{9\pi^3 e B u_1^2 R}{\sigma c_a c} \ln^{-2} \frac{p_m}{mc},$$

откуда, используя типичные значения входящих сюда параметров ($c_a = 10^5$ м/с, $u_1 = 4 \cdot 10^6$ м/с, $R = 10^{20}$ см, $\sigma = 4$, $B = 3 \cdot 10^{-6}$ Гс), получим окончательное условие: $p_m \ll 2 \cdot 10^7 mc$. Как видно, квазилинейная теория не накладывает дополнительных ограничений на величину максимального импульса космических лучей по сравне-

нию с тем, что дает минимально допустимый коэффициент диффузии $\rho_{\text{дс}}/3$. Это одновременно означает, что в условиях насыщенной инжекции альфвеновская турбулентность становится существенно нелинейной и требуются более надежные оценки на основе нелинейной теории.

Рассмотрим, насколько коллективное доускорение космических лучей ансамблем всех одновременно существующих в Галактике ударных волн от сверхновых способно повысить максимальную энергию космических лучей. Для этого определим характерное время коллективного ускорения в соответствии с выражением (3.96),

которое в данном случае примет вид: $\tau_a = (3V/4\pi) \int_{t_0}^t (\sigma - 1) / ((\sigma + 1) R^2 u_1 dt$. Поскольку реальная зависимость степени сжатия σ от времени (которая, кроме всего прочего, определяется давлением космических лучей) неизвестна, пренебрежем отличием фактора $(\sigma - 1)/(\sigma + 1)$ от единицы, что позволяет записать

$$\tau_a = 2V / [5V_{SN}(t_f) v], \quad (6.54)$$

где $V_{SN}(t_f) = (4\pi/3) R^3(t_f) = (4\pi/3) R_0^3 M_{10}^2$. Максимальная энергия космических лучей может быть оценена из соотношения $\tau_a = \tau_e(p_m)$. Диффузионная модель распространения космических лучей в Галактике на основе измерений химического состава дает [6, 191] величину объема, занимаемого частицами галактических космических лучей $V = 5 \cdot 10^{68} \text{ см}^3$, и время пребывания космических лучей с энергией $> 3 \text{ ГэВ/нуклон}$ в Галактике $\tau_e = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{3 \text{ ГэВ/нуклон}}{pc} \right)^{-0.3} \text{ лет}$.

Если, кроме того, для частоты всплесков сверхновых принять значение $v = 1/10 \text{ год}^{-1}$, получим $p_m c = 3 \cdot 10^4 \text{ ГэВ/нуклон}$. Использование результатов однородной модели распространения галактических космических лучей [189, 191] ($V = 2,5 \cdot 10^{87} \text{ см}^3$, $\tau_e = 2 \cdot 10^7 \left(\frac{3 \text{ ГэВ}}{pc} \right)^{-0.3} \text{ лет}$) приводит к величине $p_m c = 10^5 \text{ ГэВ/нуклон}$.

Следует заметить, что согласно принятой терминологии коллективный механизм представляет собой вариант межзвездного ускорения, поскольку космические лучи подвергаются ускорению все время, которое они проводят в Галактике. Поэтому считалось, что имеющиеся результаты измерения химического состава галактических космических лучей отвергают подобные модели их происхождения [6, 248—250]. Однако, как было недавно установлено [251], последовательный учет неоднородности распределения источников космических лучей в Галактике приводит к противоположному выводу о том, что межзвездное ускорение не противоречит наблюдениям.

Максимально благоприятные условия генерации частиц предельно высоких энергий реализуются в том случае, когда среда перед ударным фронтом обладает настолько хорошими рассеивающими свойствами ($\kappa_1 \ll \kappa_2$), что условие на максимальную энергию

вместо (6.52) определяется параметрами среды за ударным фронтом

$$Ru_1/\kappa_2(p_m) = 1. \quad (6.55)$$

Такая ситуация возникает, например, тогда, когда перед ударным фронтом формируются «магнитные пробки», эффективно отражающие частицы высокой энергии (см. § 20). Другая возможность, рассмотренная в § 24, состоит в эффективной генерации хаотического магнитного поля в области предфронта. Принимая гипотезу о равномерном распределении энергии (6.43) между тепловой плазмой, магнитным полем и космическими лучами, величина магнитного поля за фронтом ударной волны на начальной стадии адиабатического расширения ($R_0 = 28$ пк, $E_{\text{эп}} = 10^{51}$ эрг) составит $B = 3 \cdot 10^{-4}$ Гс. При высокой степени турбулентности поля коэффициент диффузии космических лучей близок к минимально допустимому значению $\kappa_{\text{min}} = \rho v c / 3$, что для максимальной энергии, определяемой соотношением (6.55), дает $p_{\text{мс}} = 3 \cdot 10^{17}$ эВ.

Таким образом, при тех или иных предположениях о характере инжекции частиц в режим ускорения и распространении космических лучей в Галактике, справедливость которых, конечно, требует дальнейшего уточнения, процесс ускорения космических лучей ударными волнами от сверхновых может обеспечить генерацию вплоть до энергий $10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$ эВ/нуклон. Поскольку энергия $\varepsilon_* \sim 10^{17}$ эВ, весьма возможно, отделяет галактическую компоненту ($\varepsilon \leq \varepsilon_*$) от внегалактической ($\varepsilon \geq \varepsilon_*$) в спектре галактических космических лучей, то в той мере, в какой можно доверять сделанным предположениям и оценкам, можно заключить, что регулярное ускорение ударными волнами от вспышек сверхновых способно сформировать наблюдаемый спектр галактических космических лучей. При этом, однако, нужно иметь в виду, что полученные ранее наиболее оптимистические оценки величины максимальной энергии космических лучей в наименьшей мере надежны. Для их обоснования, а следовательно, для окончательного выяснения роли процесса регулярного ускорения в формировании спектра галактических космических лучей требуется последующая детализация теории этого процесса.

Мы ограничились наше обсуждение рассмотрением тех случаев, которые позволяют провести наиболее полное сопоставление результатов теории и экспериментов, хотя, конечно, круг возможных приложений процесса регулярного ускорения намного шире. Ударные волны, возникающие при аккреции вещества на компактные астрофизические объекты [113], ударные волны на границе галактического ветра и межгалактической среды [252], ударные волны в квазарах и в ядрах активных галактик [253] — все это примеры объектов, где регулярное ускорение может играть существенную роль. Необходимые исследования в этой области находятся на начальной стадии и не исключена возможность того, что какие-то из названных объектов вносят существенный вклад в наблюдаемый спектр галактических космических лучей высоких энергий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования процесса регулярного ускорения заряженных частиц ударными волнами несомненно позволили глубже понять явления ускорения, протекающие в космической плазме. Развитие теории этого процесса помогло объяснить широкий круг наблюдаемых в межпланетном пространстве явлений ускорения заряженных частиц вблизи фронтов ударных волн. Количественные предсказания теории хорошо согласуются с экспериментальными данными. Результаты исследований астрофизических приложений указанного процесса, несмотря на имеющиеся трудности, можно также рассматривать с известной долей оптимизма, шагом на пути решения важной проблемы происхождения космических лучей. Регулярное ускорение частиц ударными волнами от вспышек сверхновых звезд, как было показано, способно сформировать спектр космических лучей наблюдаемой формы и амплитуды в широком диапазоне энергий. Дальнейшего прогресса можно ожидать при решении двух важных задач, имеющих для теории регулярного ускорения довольно общее значение.

Первая из них, наиболее сложная и наименее изученная — инжекция тепловых частиц в режим ускорения. В настоящее время отсутствуют сколько-нибудь обоснованные теоретические указания о том, в какой степени возможно ускорение частиц непосредственно из их теплового распределения за ударным фронтом без дополнительного доускорения и какими параметрами плазмы определяется количество инжектируемых частиц. Особенно важным является выяснение возможности насыщенного режима инжекции. В этом случае, когда темп инжекции частиц в режим ускорения превышает некоторое минимальное значение, ускоренным частицам передается около половины полной энергии плазмы в ударной волне благодаря саморегулирующим свойствам процесса регулярного ускорения. Судя по информации, полученной в межпланетном пространстве, режим насыщенной инжекции можно считать реальным, хотя неясно, в какой степени он реализуется в межзвездной среде. Важность этого момента связана также с тем, что, по-видимому, только при условии насыщенной инжекции ускорение на ударных волнах от сверхновых звезд способно обеспечить требуемую энергетiku галактических космических лучей.

Другой важной задачей является последовательное описание развития плазменной турбулентности перед ударным фронтом ускоренными частицами. Ее сложность, в частности, заключается в том, что магнитогидродинамическая турбулентность, как показывают оценки, может достигать нелинейного уровня. Тогда кроме обычно рассматриваемой альфвеновской турбулентности в области предфронта возможна генерация длинноволновых возмущений других типов [117, 183—185, 254]. Важное значение для проблемы происхождения космических лучей имеет также исследование динамики плазменной турбулентности. Повышение уровня возмущенности среды перед ударным фронтом ведет к снижению коэффициента диффузии космических лучей в этой области, что в условиях ударных волн конечных размеров способствует увеличению максимальной энергии ускоренных частиц.

Генерация турбулентного магнитного поля космическими лучами в окрестности фронта ударной волны может сравнительно быстро выходить на нелинейный уровень. Весьма возможно, что этот процесс на нелинейной стадии — основной источник магнитного поля. Логическим следствием гипотезы о генерации магнитного поля космическими лучами служит равномерное распределение по энергии, заключенной в магнитном поле и космических лучах, что обычно используется в качестве допущения. Заметим, что именно на основе указанного допущения удается хорошо описать наблюдаемые свойства радиоизлучения остатков сверхновых. Разработка этой теории, как нам представляется, должна означать создание нового раздела физики плазмы, предметом изучения которого являлись бы плазменные процессы, в которых космические лучи выступают важным динамическим фактором. Кроме того, изучение процесса регулярного ускорения имеет важное значение для физики бесстолкновительных ударных волн, поскольку вследствие высокой эффективности этого процесса ускоренные частицы существенно влияют на динамику и структуру ударной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях.— М.: Наука, 1983.
2. Дорман Л. И., Мирошниченко Л. И. Солнечные космические лучи.— М.: Наука, 1968.
3. Дорман Л. И. Космические лучи солнечного происхождения // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства.— М.: ВИНТИ, 1978.— Т. 12.— С. 155.
4. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Происхождение космических лучей.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
5. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1982.
6. Астрофизика космических лучей/Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л. и др.— М.: Наука, 1984.
7. Шкловский И. С. Сверхновые звезды и связанные с ними проблемы.— М.: Наука, 1976.
8. Паркер Е. Н. Динамические процессы в межпланетной среде.— М.: Наука, 1965.
9. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы.— М.: Наука, 1977.
10. Акасофу С. И., Ченмен С. Солнечно-земная физика.— М.: Наука, 1974.
11. Блох Я. Л., Дорман Л. И., Каминер Н. С. // Тр. 6 Междунар. конф. по космическим лучам.— М., 1959.— Т. 4.— С. 178.
12. Axford W. I., Reid G. C. // J. Geophys. Res.— 1962.— V. 67.— P. 1692; 1963.— V. 68.— P. 1793.
13. Чарахчян А. Н. // УФН.— 1964.— Т. 84.— С. 35.
14. Bryant D. A., Cline T. L., Desai V. D., McDonald F. B. // J. Geophys. Res.— 1962.— V. 67.— P. 4983.
15. Asbridge J. R., Bame S. J., Strong I. B. // J. Geophys. Res.— 1968.— V. 73.— P. 5777.
16. Вернов С. Н., Горчаков Е. В., Тимофеев Г. А. // Геомагнетизм и аэронавигация.— 1969.— Т. 9.— С. 961.
17. Parker E. N. // Phys. Rev.— 1958.— V. 109.— P. 1328.
18. Дорман Л. И., Фрейдман Г. И. // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы.— Рига: Зинатне, 1959.— С. 77.
19. Hoyle F. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.— 1960.— V. 120.— P. 338.
20. Шабанский В. П. // ЖЭТФ.— 1961.— Т. 41.— С. 1107.
21. Hudson P. D. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.— 1965.— V. 131.— P. 23.
22. Тверской Б. А. // ЖЭТФ.— 1967.— Т. 52.— С. 483.
23. Тверской Б. А. // Там же.— Т. 53.— С. 1417.
24. Алексеев И. И., Кроноткин А. П. // Геомагнетизм и аэронавигация.— 1970.— Т. 10.— С. 953.
25. Дорман Л. И. Ускорительные процессы в космосе. Итоги науки. Астрономия.— М.: ВИНТИ, 1972.— Т. 7.— 233 с.
26. Gosling J. T., Asbridge J. R., Bame S. J. et al. // J. Geophys. Res.— 1981.— V. 86.— P. 547.
27. Chirkov N. P., Filippov A. T. // Proc. 14-th ICRC.— München, 1975.— V. 5.— P. 1774.

28. Pomerantz M. A., Duggal S. P. // J. Geophys. Res.—1974.— V. 79.— P. 913.
29. Мирошниченко Л. И., Петров В. М. Динамика радиационных условий в космосе.— М.: Энергоатомиздат, 1985.
30. McKee C. F., Ostriker J. P. // Astrophys. J.—1977.— V. 218.— P. 213.
31. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики.— М.: Наука, 1966.
32. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Физика межзвездной среды.— М.: Наука, 1979.
33. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика.— М.: Наука, 1972.
34. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гос-техиздат, 1957.
36. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
37. Лонгмайр К. Физика плазмы.— М.: Атомиздат, 1966.
38. Сагдеев Р. З. // Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.— Т. 4.— С. 20.
39. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
40. McKee C. F., Hollenbach D. J. // Ann. Rev. Astrophys.—1980.— V. 18.— P. 219.
41. Sagdeev I. R., Sagdeev R. S., Shapiro V. D., Shevchenko V. I., Szegő K. // Preprint KFKI —1984—75.— Central Research Institute for Physics, 1984.
42. Arefiev A. S., Gedalin M. F., Krashoselskikh V. V., Lominadze J. G. // Abstracts of Papers Int. Course and Workshop on Plasma Astrophysics.— Sukhumi, 1986.— P. 192.
43. Pesses M. E. Thesis.— Univ. of Maryland: College Park, 1979.
44. Webb G. M., Axford W. I., Terasawa T. // Astrophys. J.—1983.— V. 270.— P. 573.
45. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы.— М.: Атомиздат, 1971.
46. Bell A. R. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.—1978.— V. 182.— P. 147.
47. Bell A. R. // Ibid.— P. 443.
48. Ёлшин В. К., Крымский Г. Ф., Петухов С. И., Ромашенко Ю. А., Транский И. А. // Геомагнетизм и аэронавтика.—1979.— Т. 19.— С. 793.
49. Peacock I. E. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.—1981.— V. 196.— P. 135.
50. Michel C. F. // Astrophys. J.—1981.— V. 247.— P. 664.
51. Webb G. M., Drury L. O'C., Bierman F. // Astron. Astrophys.—1984.— V. 137.— P. 185.
52. Drury L. O'C. // Rep. Progr. Phys.—1983.— V. 46.— P. 973.
53. Крымский Г. Ф. // Докл. АН СССР.—1977.— Т. 234.— С. 1306.
54. Axford W. I., Leer E., Skadron G. // Proc. 15-th ICRC.— Plovdiv, 1977.— V. 11.— P. 132.
55. Blandford R. D., Ostriker J. R. // Astrophys. J.—1978.— V. 221.— P. 129.
56. Fermi E. // Ibid.—1954.— V. 119.— P. 1.
57. Fermi E. // Phys. Rev.—1949.— V. 75.— P. 1169.
58. Бережко Е. Г. // Письма в ЖЭТФ.—1981.— Т. 33.— С. 416.
59. Бережко Е. Г., Крымский Г. Ф. // Письма в астроф. журн.—1981.— Т. 7.— С. 636.
60. Бережко Е. Г. // Там же.—1982.— Т. 8.— С. 747.
61. Armstrong J. W., Cords J. M., Rickett B. J. // Nature.—1981.— V. 291.— P. 561.
62. Blandford R. D. // Proc. AIP Conf. N 56.— La Jolla, 1979.— P. 333.
63. Toptygin I. N. // Space Sci. Rev.—1980.— V. 26.— P. 157.
64. Axford W. I. // Proc. IAU/IUPAP Symp. N 94.— Dordrecht, 1980.— P. 339.
65. Völk H. J. // Preprint NPI H-1984-V-19.— Heidelberg, 1984.
66. Axford W. I. // Proc. 17-th ICRC.— Paris, 1981.— V. 12.— P. 155.
67. Крымский Г. Ф. Геомагнетизм и аэронавтика.—1964.— Т. 4.— С. 977.
68. Parker E. N. // Planet. Space Sci.—1965.— V. 13.— P. 9.
69. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. // ЖЭТФ.—1966.— Т. 51.— С. 1771.
70. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. // Геомагнетизм и аэронавтика.—1967.— Т. 7.— С. 785.
71. Gleeson L. J., Axford W. I. // Astrophys. J.—1967.— V. 149.— P. L115.

72. Gleeson L. J., Webb G. M. // *Astrophys. Space Sci.*—1978.— V. 60.— P. 335.
73. Бережко Е. Г. // *Геомагнетизм и аэрономия.*—1984.— Т. 24.— С. 714.
74. Крымский Г. Ф. Модуляция космических лучей в межпланетном пространстве.— М.: Наука, 1969.
75. Космические лучи и солнечный ветер/Крымский Г. Ф., Кузьмин А. И., Кривошапкин П. А. и др.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
76. Васильев В. Н., Топтыгин И. Н., Чирков А. Г. // *Геомагнетизм и аэрономия.*—1978.— Т. 18.— С. 415.
77. Webb G. M. // *Astron. Astrophys.*—1983.— V. 124.— P. 163.
78. Ходжаев К. Ш., Чирков А. Г., Шаталов С. Д. // *Журн. прикл. механики и техн. физики.*—1981.— Т. 4.— С. 3.
79. Gurevich L. E., Rumiyansev A. A. // *Astrophys. Space Sci.*—1980.— V. 72.— P. 261.
80. Terasawa T. // *Planet. Space. Sci.*—1979.— V. 27.— P. 193.
81. Крымский Г. Ф., Ёлшин В. К., Ромащенко Ю. А., Безродных И. П. // *Изв. АН СССР. Сер. физ.*—1978.— Т. 42.— С. 1070.
82. Ёлшин В. К., Крымский Г. Ф., Петухов С. И. и др. // *Геомагнетизм и аэрономия.*—1981.— Т. 21.— С. 781.
83. Васильев В. Н., Топтыгин И. Н., Чирков А. Г. // *Изв. АН СССР. Сер. физ.*—1978.— Т. 42.— С. 984.
84. Васильев В. Н., Топтыгин И. Н., Чирков А. Г. // *Космич. исслед.*—1980.— Т. 18.— С. 556.
85. Прицен В. Л., Итускин В. С. // *Астрон. журн.*—1981.— Т. 58.— С. 779.
86. Forman M. A., Drury L. O'C. // *Proc. 18-th ICRC.*—Bangalore, 1983.— V. 2.— P. 267.
87. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.
88. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
89. Drury L. O'C., Axford W. I., Summers D. // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*—1982.— V. 198.— P. 833.
90. Völk H. J., Morfill G. E., Forman M. A. // *Proc. 16-th ICRC.*—Kyoto, 1969.— V. 2.— P. 38.
91. Völk H. J., Morfill G. E., Forman M. A. // *Astrophys. J.*—1981.— V. 249.— P. 161.
92. Буланов С. В., Догель В. А. Письма в астрон. журн.—1979.— Т. 5.— С. 521.
93. Цытович В. Н. // *УФН.*—1966.— Т. 9.— С. 370.
94. Hall D. E., Sturrok P. A. // *Phys. Fluids.*—1967.— V. 10.— P. 1593.
95. Hall D. E., Sturrok P. A. // *Ibid.*— P. 2620.
96. Melrose D. B. // *Astrophys. Space Sci.*—1968.— V. 2.— P. 171.
97. Melrose D. B. // *Ibid.*—1969.— V. 4.— P. 143.
98. Melrose D. B. // *Solar Phys.*—1974.— V. 37.— P. 353.
99. Kuhsrud R. M., Ferrari A. // *Astrophys. Space Sci.*—1971.— V. 12.— P. 302.
100. Toptygin I. N. // *Ibid.*—1973.— V. 20.— P. 351.
101. Skilling Y. // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*—1975.— V. 172.— P. 557.
102. Fisk L. A. // *J. Geophys. Res.*—1976.— V. 81.— P. 4633.
103. Fisk L. A. // *Ibid.*— P. 4641.
104. Achterberg A. // *Astron. Astrophys.*—1981.— V. 97.— P. 259.
105. Тверской Б. А. // Тр. 10-го Ленингр. семинара по космофизике.— Л., 1978.— С. 137.
106. Тверской Б. А. // *Геомагнетизм и аэрономия.*—1983.— Т. 23.— С. 353.
107. Webb G. M. // *Astrophys. J.*—1983.— V. 270.— P. 319.
108. Bulanov S. V., Pukhov A. A. // *Proc. 17-th ICRC.*—Paris, 1981.— V. 2.— P. 322.
109. Webb G. M., Axford W. I., Forman M. A. // *Ibid.*— P. 309.
110. Forman M. A., Webb G. M., Axford W. I. // *Ibid.*— P. 313.
111. Webb G. M., Axford W. I., Forman M. A. // *Proc. 18-th ICRC.*—Bangalore, 1983.— V. 2.— P. 263.
112. Дорман Л. И., Кац М. Е., Носов С. Ф. и др. // *Геомагнетизм и аэрономия.*—1982.— Т. 22.— С. 705.

113. Cowsik R., Lee M. A. Proc. 17-th ICRC.—Paris, 1981.—V. 2.—P. 318.
114. Крымский Г. Ф., Петухов С. И. // Письма в астроф. журн.—1980.—Т. 6.—С. 227.
115. Бережко Е. Г., Крымский Г. Ф. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1982.—Т. 46.—С. 1656.
116. Бережко Е. Г., Ёлшин В. К., Крымский Г. Ф., Турпанов А. А. // Там же.—1986.—Т. 50.—С. 2241.
117. Berezhko E. G. // Abstracts of Papers Int. Course and Workshop on Plasma Astrophysics.—Sukhumi, 1986.—P. 138.
118. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972.
119. Быков А. М., Топтыгин И. Н. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1979.—Т. 43.—С. 2552.
120. Быков А. М., Топтыгин И. Н. // Там же.—1980.—Т. 44.—С. 2574.
121. Быков А. М., Топтыгин И. Н. // Там же.—1981.—Т. 45.—С. 474.
122. Berezhko E. G., Krymsky G. F. // Proc. 18-th ICRC.—Bangalore, 1983.—V. 2.—P. 255.
123. Berezhko E. G., Krymsky G. F. // Abstracts 25-th Plenary Meeting, COSPAR.—Graz, 1984.—P. 128.
124. Мурзин В. С. Физика космических лучей.—М.: Изд-во МГУ, 1970.
125. Ферми Э. Лекции по нейтронной физике: Науч. тр.—М.: Наука, 1972.—Т. 2.—С. 236.
126. Петухов С. И., Турпанов А. А., Николаев В. С. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1984.—Т. 48.—С. 2066.
127. Петухов С. И., Турпанов А. А., Николаев В. С. // Геомагнетизм и аэронавиг.—1986.—Т. 26.—С. 197.
128. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики.—М.: Наука, 1971.—Т. 2.
129. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии.—М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
130. Прудников А. М., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука, 1983.
131. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.—М.: Изд-во иностр. лит., 1958.—Т. 1; 1960.—Т. 2.
132. Lagage P. O., Cesarsky C. J. // Proc. Int. School and Workshop on Plasma Astrophysics, Varenna. European Space Agency SP—161, 1981.—P. 317.
133. Lagage P. O., Cesarsky C. J. // Astron. Astrophys.—1983.—V. 118.—P. 223.
134. Боровков А. А. Курс теории вероятностей.—М.: Наука, 1972.
135. Larche I. // Astrophys. J.—1967.—V. 147.—P. 689.
136. Wentzel D. G. // Ibid.—1968.—V. 152.—P. 187.
137. Kuksrud R., Pearce W. P. // Ibid.—1969.—V. 156.—P. 445.
138. Tadamaru E. // Ibid.—V. 158.—P. 959.
139. Lee M. A. // Ibid.—1972.—V. 178.—P. 837.
140. Lee M. A. // J. Geophys. Res.—1982.—V. 87.—P. 5063.
141. Lee M. A. // Ibid.—1983.—V. 88.—P. 6109.
142. Achterberg A. // Astron. Astrophys.—1983.—V. 119.—P. 274.
143. Веденов А. А., Велухов Е. П., Сагдеев Р. З. // УФН.—1961.—Т. 73.—С. 701.
144. Электродинамика плазмы/Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.—М.: Наука, 1976.
145. Drury L. O'C., Völk H. J. // Astrophys. J.—1981.—V. 248.—P. 344.
146. Axford W. I., Leer E., McKenzie J. F. // Astron. Astrophys.—1982.—V. 111.—P. 317.
147. McKenzie J. F., Völk H. J. // Ibid.—V. 116.—P. 181.
148. Völk H. J., Drury L., O'C., McKenzie J. F. // Ibid. 1984.—V. 130.—P. 19.
149. Völk H. J. // Preprint MPI H-1984-V19.—Heidelberg: Max-Planck—Institute für Kernphysik, 1984.
150. Skilling J. A. // Astrophys. J.—1971.—V. 170.—P. 265.
151. Achterberg A., Norman C. A. // Astron. Astrophys.—1980.—V. 89.—353.
152. Achterberg A. // Ibid.—1981.—V. 76.—P. 195.
153. Ptuskin V. S. // Astrophys. Space Sci.—1981.—V. 76.—P. 265.
154. Lee M. A., Völk H. J. // Ibid.—1973.—V. 24.—P. 31.

155. Буланов С. В., Соколов И. В. // *Астрон. журн.*—1984.—Т. 61.—С. 882.
156. Буланов С. В., Соколов И. В. // *Письма в астрон. журн.*—1984.—Т. 10.—С. 594.
157. Webb G. M. // *Astron. Astrophys.*—1983.—V. 127.—P. 97.
158. Крымский Г. Ф. // *Тр. 7-го Европейского симпозиума по космическим лучам.*—Л., 1980.—С. 200.
159. Крымский Г. Ф. // *Изв. АН СССР. Сер. физ.*—1981.—Т. 45.—С. 461.
160. Ellison D. C. Thesis.—Washington: Catholic University, 1981.
161. Ellison D. C., Jones F. C., Eichler D. // *J. Geophys.*—1981.—V. 50.—P. 110.
162. Ellison D. C. // *Geophys. Res. Lett.*—1981.—V. 9.—P. 991.
163. Eichler D. // *Astrophys. J.*—1984.—V. 277.—P. 429.
164. Ellison D. C., Eichler D. // *Ibid.*—V. 286.—P. 691.
165. Berezhko E. G., Yelshin V. K., Krymsky G. F., Romachenko Yu. A. // *Proc. 18-th ICRC.*—Bangalore, 1983.—V. 2.—P. 259.
166. Бережко Е. Г., Елшин В. К., Крымский Г. Ф., Ромащенко Ю. А. // *Изв. АН СССР. Сер. физ.*—1984.—Т. 48.—С. 2221.
167. Berezhko E. G., Yelshin V. K., Krymsky G. F., Turpanov A. A. // *Proc. 19-th ICRC.*—La Jolla, 1985.—V. 2.—P. 152.
168. Ellison D. C. // *J. Geophys. Res.*—1985.—V. 90.—P. 29.
169. Ellison D. C., Jones F. C., Eichler D. // *Proc. 18-th ICRC.*—Bangalore, 1983.—V. 2.—P. 271.
170. Eichler D., Hainebach K. // *Phys. Rev. Lett.*—1981.—V. 47.—P. 1560.
171. Eichler D. // *Astrophys. J.*—1979.—V. 229.—P. 419.
172. Blandford R. D. // *Ibid.*—1980.—V. 238.—P. 410.
173. Eichler D. // *Ibid.*—1981.—V. 244.—P. 711.
174. Heavens A. F. // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*—1983.—V. 204.—P. 699.
175. Achterberg A., Blandford R., Periwé V. // *Astron. Astrophys.*—1984.—V. 132.—P. 97.
176. Krymsky G. F. // *Adv. Space Res.*—1984.—V. 4.—P. 175.
177. Eichler D. // *Astrophys. J.*—1985.—V. 294.—P. 40.
178. Ellison D. C., Eichler D. // *Phys. Rev. Lett.*—1985.—V. 55.—P. 2735.
179. Галеев А. А. // *ЖЭТФ.*—1985.—Т. 86.—С. 1655.
180. Грибов Б. Э., Сагдеев Р. З., Сёре К., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. // *Письма в ЖЭТФ.*—1986.—Т. 43.—С. 230.
181. Кручина Е. Н., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д. // *ЖЭТФ.*—1985.—Т. 88.—С. 789.
182. Мутер С. Л., Рубенчик А. М., Шапиро И. Я. // *Там же.*—1986.—Т. 90.—С. 890.
183. Drury L. O'C. // *Adv. Space Res.*—1984.—V. 4.—P. 185.
184. Zank A. P., McKenzie J. F. // *Proc. 19-th ICRC.*—La Jolla, 1985.—V. 3.—P. 111.
185. Dorfi E. A., Drury L. O'C. // *Ibid.*—P. 121.
186. Лозинская Т. А. // *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия.*—М.: ВИНТИ, 1983.—Т. 22.—С. 33.
187. Chevalier R. A. // *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*—1977.—V. 15.—P. 175.
188. Völk H. J., Forman M. // *Astrophys. J.*—1982.—V. 253.—P. 188.
189. Garcia-Munoz M., Mazon G. M., Simpson J. A. // *Ibid.*—1977.—V. 217.—P. 859.
190. Ginzburg V. L., Khazan Ya. M., Ptuskin V. S. // *Astrophys. Space Sci.*—1980.—V. 68.—P. 295.
191. Гинзбург В. Л., Птушкин В. С. // *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия.*—М.: ВИНТИ, 1983.—Т. 24.—С. 94.
192. Трубинов В. А. // *Вопросы теории плазмы.*—М.: Атомиздат, 1963.—С. 98.
193. Krymsky G. F., Kuzmin A. I., Petukhov S. I. // *Proc. 16-th ICRC.*—Kyoto, 1979.—V. 2.—P. 44.
194. Lin R. P., Meng C. I., Anderson K. A. // *J. Geophys. Res.*—1974.—V. 79.—P. 489.
195. Gosling Y. T., Asbridge J. R., Bame S. J. et al. // *J. Geophys. Res. Lett.*—1978.—V. 5.—P. 957.

196. Ipavich F. M., Galvin A. B., Gloeckler G. e. a. // J. Geophys. Res.—1981.— V. 86.— P. 4337.
197. Gosling Y. T., Ashridge Y. R., Bame S. J., Feldman W. C. // Proc. Int. Conf. on Particle Acceleration Mechanism in Astrophysics.— N. Y., 1979.— N 56.— P. 81.
198. Hoppe M. M., Russell C. T., Frank L. A. e. a. // J. Geophys. Res.—1981.— V. 86.— P. 4471.
199. Formisano V. // Nuovo Cimento.— 1979.— V. 26.— P. 789.
200. McDonald F. B., Teegarden B. J., Trainor J. H. e. a. // Astrophys. J.—1976.— V. 203.— P. L149.
201. Barnes C. W., Simpson J. A. // Ibid.— V. 210.— P. L91.
202. Trainor J. H., Von Rosenvinge T. T. // J. Geophys. Res.—1978.— V. 83.— P. 4723.
203. Christon S., Simpson J. A. // Astrophys. J.—1979.— V. 227.— P. L49.
204. Kunow H., Wihherentz G., Green G. e. a. // Proc. 15-th ICRC.— Plovdiv, 1977.— V. 3.— P. 227.
205. Gloeckler G., Hovestadt D., Fisk L. A. // Astrophys. J.—1979.— V. 230.— P. L191.
206. Зельдович М. А., Лорачев Ю. И. // Космич. исслед.—1981.— Т. 19.— С. 53.
207. Gloeckler G., Ipavich F. M., Fan C. Y., Hovestadt D. // Geophys. Res. Lett.—1974.— V. 1.— P. 65.
208. Scholer M., Ipavich F. M., Gloeckler G., Hovestadt D. // J. Geophys. Res.—1983.— V. 88.— P. 1977.
209. Van Nes P., Reinhard R., Sanderson T. R., Wenzel K.-P. // Ibid.—1984.— V. 89.— P. 2127.
210. Tsurutani B. T., Lin D. P. // Ibid.—1985.— V. 80.— P. 1.
211. Sanderson T. R., Reinhard R., Van Nes P., Wenzel K.-P. // Ibid.—1985.— V. 90.— P. 19.
212. Sonnerup B. V. O. // Ibid.—1969.— V. 74.— P. 1301.
213. Sarris E. T., Van Allen J. A. // Ibid.—1974.— V. 79.— P. 4157.
214. Lee M. A., Fisk L. A. // Space Sci. Rev.—1982.— V. 32.— P. 205.
215. Fisk L. A., Lee M. A. // Astrophys. J.—1980.— V. 237.— P. 620.
216. Zwicky R. D., Webber W. R. // Solar Phys.—1977.— V. 54.— P. 457.
217. Berezko E. G. Abstracts 24-th Plenary Meeting COSPAR.— Ottawa, 1982.— P. 45.
218. Terasawa T. // Planet. Space Sci.—1979.— V. 27.— P. 35.
219. Terasawa T. // J. Geophys. Res.—1981.— V. 86.— P. 7595.
220. Lee M. A., Skadron G., Fisk L. A. // Geophys. Res. Lett.—1981.— V. 8.— P. 401.
221. Forman M. A. Proc. 17-th ICRC.— Paris, 1981.— V. 3.— P. 467.
222. Greenstadt E. W., Green I. M., Inoye G. T. e. a. // J. Geophys. Res.—1968.— V. 73.— P. 51.
223. Fairfield D. H. // Ibid.—1969.— V. 74.— P. 3541.
224. Childers D. D., Russell C. T. // NASA Spec. Publ.—1972.— V. 308.— P. 375.
225. Scholer M., Ipavich F. M., Gloeckler G., Hovestadt D. // J. Geophys. Res.—1980.— V. 86.— P. 4602.
226. Jokipii J. R. // Geophys. Space Phys.—1971.— V. 9.— P. 27.
227. Russell C. T. // NASA Spec. Publ.—1972.— V. 308.— P. 365.
228. Ipavich F. M., Scholer M., Gloeckler G. // J. Geophys. Res.—1981.— V. 86.— P. 153.
229. Bame S. J., Ashridge Y. R., Feldman W. C. e. a. // Ibid.—1980.— V. 85.— P. 2981.
230. Bai T., Hudson H. S., Pelling R. M. e. a. // Astrophys. J.—1983.— V. 267.— P. 433.
231. Ellison D. S., Ramaty R. // Ibid.—1985.— V. 298.— P. 400.
232. Svetska Z., Fritzona L. // Solar Phys.—1974.— V. 36.— P. 417.
233. Дорман И. В., Дорман Л. И. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1967.— Т. 31.— С. 1239.
234. Jokipii J. R. // Astrophys. J.—1968.— V. 152.— P. 799.
235. Бахарева М. Ф. // Геомагнетизм и аэронавигация.—1975.— Т. 15.— С. 393.
236. Petukhov S. I., Nikolaev V. S., Turpanov A. A. // Proc. 17-th ICRC.— Paris, 1981.— V. 3.— P. 460.

237. Eichler D., Pesses M. E., Jokipii J. R. // Proc. 17-th ICRC.— Paris, 1981.— V. 3.— P. 463.
238. Petukhov S. I., Turpanov A. A., Nikolaev V. S. // Proc. 19-th ICRC.— La Jolla, 1985.— V. 4.— P. 196.
239. Hamilton D. C. // J. Geophys. Res.— 1977.— V. 82.— P. 2157.
240. Goldstein M. I. // Ibid.— 1980.— V. 85.— P. 3033.
241. Zwickl R. D., Webber W. R. // Ibid.— 1978.— V. 83.— P. 1157.
242. Зельдович М. А., Лорачев Ю. И. // Космич. исслед.— 1983.— Т. 21.— С. 803.
243. Blandford R. D., Ostriker J. P. // Astrophys. J.— 1980.— V. 237.— P. 793.
244. Bogdan T. Y., Völk H. J. // Astron. Astrophys.— 1983.— V. 112.— P. 129.
245. Moraal H., Axford W. I. // Ibid.— V. 125.— P. 204.
246. Ginzburg V. L., Ptuskin V. S. // Proc. 17-th ICRC.— Paris, 1979.— V. 2.— P. 336.
247. Fedorenko V. N. // Astrophys. Space Sci.— 1983.— V. 96.— P. 25.
248. Hayakawa S. // Cosmic Ray Physics.— Wiley: New York, 1969.
249. Cowsik R. // Astrophys. J.— 1980.— V. 241.— P. 1195.
250. Eichler D. // Ibid.— V. 237.— P. 809.
251. Lerche I., Schlickeiser R. // Proc. 19-th ICRC.— La Jolla, 1985.— V. 3.— P. 226.
252. Jokipii J. R., Morfill G. F. // Ibid.— P. 132.
253. Kazanas D., Ellison D. C. // Ibid.— P. 128.
254. McKenzie J. F., Webb G. M. // J. Plasma Phys.— 1984.— V. 31.— P. 275.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Явления ускорения заряженных частиц в космической плазме	4
§ 1. Основные параметры космической плазмы	5
§ 2. Ударные волны в космической плазме	8
§ 3. Процессы ускорения в окрестности ударного фронта	10
Глава 2. Линейная теория регулярного ускорения. Диффузионный подход	16
§ 4. Диффузионное уравнение переноса	17
§ 5. Граничные условия на ударном фронте	18
§ 6. Ускорение плоской ударной волной	22
§ 7. Темп регулярного ускорения	26
§ 8. Ускорение частиц ударной волной с фронтом конечной толщины	29
§ 9. Регулярное ускорение при наличии конкурирующих процессов	35
Глава 3. Ускорение частиц ударными волнами конечных размеров	42
§ 10. Уравнение переноса и граничные условия в случае сферической симметрии	—
§ 11. Стоячая ударная волна в звездном ветре	44
§ 12. Стоячая ударная волна в аккрецирующем веществе	51
§ 13. Бегущая ударная волна	54
§ 14. Ускорение частиц ансамблем ударных волн	60
Глава 4. Метод поколений в линейной теории регулярного ускорения	69
§ 15. Кинетическое приближение в методе поколений	70
§ 16. Диффузионное приближение в методе поколений	80
Глава 5. Нелинейные модели процесса регулярного ускорения	97
§ 17. Генерация альфвеновских волн в окрестности ударного фронта	98
§ 18. Магнитогидродинамическая структура ударной волны в газе с космическими лучами	106
§ 19. Кинетическая модель регулярного ускорения	114
§ 20. Раскачка магнитозвуковых волн в области предфронта ударной волны	125
§ 21. Некоторые особенности процесса регулярного ускорения в условиях сильной нелинейности	130
Глава 6. Космические лучи на фронтах ударных волн	134
§ 22. Возможности реализации регулярного ускорения в космической плазме	135
§ 23. Ускорение космических лучей межпланетными ударными волнами	138
§ 24. Галактические космические лучи малых энергий	157
§ 25. Космические лучи и сверхновые звезды	161
Заключение	172
Список литературы	174

Научное издание

Бережко Евгений Григорьевич
Елинин Виктор Константинович
Крымский Гермоген Филиппович
Петухов Станислав Иванович

**ГЕНЕРАЦИЯ
КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ
УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ**

Редактор издательства Л. П. Голышева
Художественный редактор Т. Ф. Каминина
Художник А. И. Смирнов
Технический редактор Г. Я. Герасимчук
Корректоры Е. В. Тухтарова, В. К. Жихарева

ИБ № 34162

Сдано в набор 11.11.87. Подписано к печати 27.05.88.
МН-01640. Формат 60×90^{1/16}. Бумага для множительных ап-
паратов. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ.
л. 11,5. Усл. кр.-отт. 11,5. Уч.-изд. л. 13. Тираж 1000 экз.
Заказ № 1168. Цена 2 р. 80 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, ул. Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077,
Новосибирск, ул. Станиславского, 25.

УВАЖАЕМЫЕ ТОВАРИЩИ!

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресу: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига», 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

- 480091 Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»)
- 370005 Баку, ул. Коммунистическая, 51 («Книга — почтой»)
- 232600 Вильнюс, ул. Университето, 4
- 690088 Владивосток, Океанский проспект, 140 («Книга — почтой»)
- 320093 Днепрпетровск, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»)
- 734001 Душанбе, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»)
- 375002 Ереван, ул. Туманяна, 31
- 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»)
- 252030 Киев, ул. Ленина, 42
- 252142 Киев, проспект Вернадского, 79
- 252030 Киев, ул. Пирогова, 2
- 252030 Киев, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»)
- 277012 Кишинев, проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»)
- 343900 Краматорск, Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»)
- 660049 Красноярск, проспект Мира, 84
- 443002 Куйбышев, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»)
- 191104 Ленинград, Литейный проспект, 57
- 199164 Ленинград, Таможенный пер., 2
- 196034 Ленинград, В/О, 9 линия, 16
- 220012 Минск, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»)
- 103009 Москва, ул. Горького, 19а
- 117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7
- 630076 Новосибирск, Красный проспект, 51
- 630090 Новосибирск, Морской проспект, 22 («Книга — почтой»)
- 142284 Протвино, Московской обл., ул. Победы, 8
- 142292 Пущино, Московской обл., МР, «В», 1

- 620161 Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»)
700000 Ташкент, ул. Ю. Фучика, 1
700029 Ташкент, ул. Ленина, 73
700070 Ташкент, ул. Шота Руставели, 43
700185 Ташкент, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»)
634050 Томск, наб. реки Ушайки, 18
634050 Томск, Академический проспект, 5
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»)
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49
720000 Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»)
310078 Харьков, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»)







THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS